Matrix introduktion

Mikkel H. Brynildsen

6. september 2013

Operationer

Lad $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, så $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Lad $r \in \mathbb{R}$ være et reelt tal.

Addition: $\vec{v} + \vec{u} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_n + u_n)$,

Skalarmultiplikation: $r\vec{v} = (rv_1, rv_2, \ldots, rv_n)$,

Prikprodukt: $\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots + v_n u_n$,

Længde: $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdot + v_n^2}$,

Afstand: $d(\vec{v}, \vec{u}) = \|\vec{v} - \vec{u}\|$

$$= \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + \cdot + (v_n - u_n)^2}$$

Vinkel: $\cos\theta = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\|}$.

Matricer og vektorer

$m \times n$-matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, a_{ij} \text{ : indgang } (i,j) \text{ i } A$$

Række- og søjlevektorer

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}.$$

Matrix sum, Matrix-vektor produkt

Sum

Lad A og B være $m \times n$-matricer. Så er $m \times n$-matricen $c_1A + c_2B$, hvor c_1 og c_2 er skalarer, givet ved

$$(c_1A + c_2B)_{i,j} = c_1(A)_{i,j} + c_2(B)_{i,j},$$

hvor $(C)_{i,j}$ betegner indgang (i,j) i matricen C.

Matrix-vektor produkt

Lad $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$ være en $m \times n$-matrix med søjlevektorer $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. For $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ defineres

$$A\vec{v} = [\vec{a}_1 \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + \cdots + v_n\vec{a}_n = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{v} \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{r}_m \cdot \vec{v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Linearitet

Matrix-vektorproduktet opfylder følgende vigtige linearitetsegenskab: For en $m \times n$-matrix A og $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gælder

$$A(r_1\vec{u} + r_2\vec{v}) = r_1 A\vec{u} + r_2 A\vec{v}$$

for alle skalarer r_1 og r_2.

Identitetsmatricen

Identitetsmatricen $I_n := [a_{ij}]$ er den $n \times n$-matrix, der har indgangene

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}; \qquad \text{f.eks. } I_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Søjlevektorerne i I_n benævnes $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Matricens navn er en konsekvens af, at $I_n\vec{v} = \vec{v}$ for alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Den transponerede

Definition

For en $m \times n$-matrix $A = [a_{ij}]$ defineres den transponerede til A som $n \times m$-matricen givet ved $A^\top := [a_{ji}]$. Dvs søjler i A bliver til rækker i $A^\top$ og vice versa.

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -7 \\ -3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^\top = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 3 & -7 & 0 \end{bmatrix}.$$