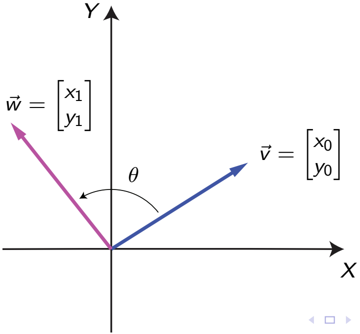
# Rotationsmatrix

Sæt

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

At gange vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ med $A_\theta$ svarer til at rotere vektor $\vec{v}$ med vinkelen $\theta$ til vektor $\vec{w}$:

$$A_\theta \vec{v} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0\cos\theta - y_0\sin\theta \\ x_0\sin\theta + y_0\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{w}.$$



Vi betragter det lineære ligningssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

der kan skrives kort med matrix-vektorprodukt $A\vec{x} = \vec{b}$.
Løsningsmængden for systemet er familien af samtlige løsninger. Er løsningsmængden tom, da kaldes systemet *ikke-konsistent*.
Systemets totalmatrix er

$$[A\ \vec{b}] = [\vec{a}_1\vec{a}_2\cdots\vec{a}_n|\vec{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

# De 3 elementære rækkeoperationer

- Til række nr. $j$ adderes en konstant $k$ gange række nr. $i$.

$$[A\ \vec{b}] = \begin{bmatrix} - & - & \vec{r}_i & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & \vec{r}_j & - & - \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} - & - & \vec{r}_i & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & \vec{r}_j + k\vec{r}_i & - & - \end{bmatrix} = [B\ \vec{c}].$$

- Række nr. $i$ og $j$ ombyttes.

$$[A\ \vec{b}] = \begin{bmatrix} - & - & \vec{r}_i & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & \vec{r}_j & - & - \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} - & - & \vec{r}_j & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & \vec{r}_i & - & - \end{bmatrix} = [B\ \vec{c}].$$

- Række $i$ ganges med en konstant $k \neq 0$.

$$[A\ \vec{b}] = \begin{bmatrix} - & - & \vec{r}_i & - & - \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} - & - & k\vec{r}_i & - & - \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} = [B\ \vec{c}].$$

$[A\ \vec{b}]$ og $[B\ \vec{c}]$ er rækkeækvivalente, og vi skriver $[A\ \vec{b}] \sim [B\ \vec{c}]$.
VIGTIGT! Løsningsmængden for et tilhørende ligningssystem ændres ikke ved disse rækkeoperationer!

# Trappeform

**En matrix er på trappeform hvis:**

- Eventuelle nulrækker er nederst i matricen
- Første indgang $\neq 0$ (fra venstre) i en række, er til højre for første indgang $\neq 0$ i rækken ovenfor
- Alle indgange nedenfor en første indgang $\neq 0$, er nul

**En matrix er på *reduceret* trappeform hvis:**

- Den er på trappeform
- Alle første indgange $\neq 0$ i rækkerne er 1
- En sådan indgang 1, er den eneste indgang $\neq 0$ i den pågældende søjle

# Reduktion til reduceret trappeform

**Sætning**

En given matrix $A$ kan rækkereduceres til en og kun en matrix $R$ på reduceret trappeform.

**Pivot'er**

Lad $A$ være en $m \times n$-matrix og lad $A \sim R$, hvor $R$ er på (reduceret) trappeform. En første indgang $\neq 0$ i en række $R$ kaldes en *pivot*. De tilhørende søjler (i den oprindelige matrix $A$) kaldes *pivot søjler*.

# Bestemme om et ligningssystem er konsistent

## Er et ligningssystem konsistent?

- i Skriv ligningssystemets totalmatrix $[A\ \vec{b}]$ op.
- ii Reducer til trappeform. Hvis sidste søjle er en pivot-søjle, så er ligningssystemet ikke-konsistent. Ellers er det konsistent.

## Eksempel

Ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & = & 6 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & = & -10 \end{array}$$

har totalmatricen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & -10 \end{array}\right] \overset{r_2 \to r_2 + r_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right].$$

Den sidste matrix er på trappeform. Der er ikke pivot i sidste søjle, så ligningssystemet er konsistent.

# Generel løsning fra $[R\ \vec{c}]$

Betragt en totalmatrix

$$[R\ \vec{c}] = \left[\begin{array}{cccc|c} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} & c_1 \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} & c_m \end{array}\right]$$

hvor $m \times (n+1)$-matricen $[R\ \vec{c}]$ er på reduceret trappeform. Antag det tilhørende ligningssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} r_{11}x_1 & + & r_{12}x_2 & + & \cdots & + & r_{1n}x_n & = & c_1 \\ r_{21}x_1 & + & r_{22}x_2 & + & \cdots & + & r_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ r_{m1}x_1 & + & r_{m2}x_2 & + & \cdots & + & r_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

er konsistent.

# Generel løsning fra $[R\ \vec{c}]$, fortsat

løsning af ligningssystemet:

$$\begin{array}{ccccccccc} r_{11}x_1 & + & r_{12}x_2 & + & \cdots & + & r_{1n}x_n & = & c_1 \\ r_{21}x_1 & + & r_{22}x_2 & + & \cdots & + & r_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ r_{m1}x_1 & + & r_{m2}x_2 & + & \cdots & + & r_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

Fremgangsmåde:

(i) Identificer ikke-pivot søjler i $R$, disse svarer til frie variable.

(ii) Skriv det tilhørende ligningssystem op, flyt de frie variable over på højre side (gang evt med nul så alle frie variable optræder i alle ligninger).

(iii) Indfør parametre $(s, t, u, \dots)$ for de frie variable, dette giver en simpel definitions-ligning for hver fri variabel (f.eks. $x_4 = s$).

(iv) Skriv ligningssystemet *og* definitionerne af de frie variable op som $n$ ligninger, dette er den generelle løsning på parameterform.

(v) Gang evt med nul så alle parametre optræder i alle ligninger på højre side af den generelle løsning på parameterform. Nu kan den generelle løsning på parametriseret vektorform skrives op.

# Generel løsning fra $[R \; \vec{c}]$. fortsat

Den generelle løsning på vektorform har typisk formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \vec{x} = \vec{d}_c + s\vec{d}_1 + t\vec{d}_2 + \cdots, \qquad (s, t, \ldots \in \mathbb{R}),$$

hvor vektoren $\vec{d}_c$ indeholder koordinaterne i $\vec{c}$ (evt. med nogle nuller tilsat).
Hvis der er mindst en fri variabel, findes der uendeligt mange løsninger (en for hvert valg af parametre).

**Bemærk**

Hvis alle søjler i $R$ er pivot-søjler, så er der ikke nogle frie variable. I sådanne tilfælde er $R = \begin{bmatrix} I_n \\ -0- \end{bmatrix}$, og der findes *en* unik løsning, givet ved de første $n$ koordinater af $\vec{c}$.