Matrx-vektor produkt

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 0 + 4 \\ -2 + 0 - 40 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 \\ -42 \end{bmatrix}}}$$

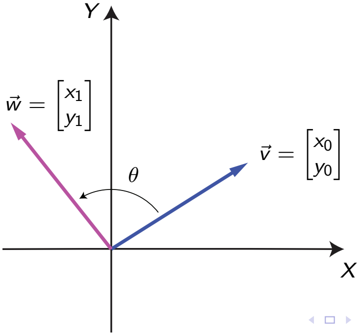
Rotationsmatrix

Sæt

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

At gange vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ med A_θ svarer til at rotere vektor $\vec{v}$ med vinkelen θ til vektor $\vec{w}$:

$$A_\theta \vec{v} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \cos\theta - y_0 \sin\theta \\ x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{w}.$$



Brug af rotationsmatrix

Rotationsvinkel $\theta = 45^\circ (= \frac{\pi}{4} rad.)$, $\vec{u} = \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Find $\vec{u}$ roteret med θ.

$\cos\theta = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$A_{45^\circ} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

(lavede fejl i reg. og skev $\frac{2}{\sqrt{2}}$ ...)

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}$$

Vi betragter det lineære ligningssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

der kan skrives kort med matrix-vektorprodukt $A\vec{x} = \vec{b}$.
Løsningsmængden for systemet er familien af samtlige løsninger. Er løsningsmængden tom, da kaldes systemet *ikke-konsistent*.
Systemets totalmatrix er

$$[A\ \vec{b}] = [\vec{a}_1\vec{a}_2\cdots\vec{a}_n|\vec{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Eksempel, koefficientmatrix, totalmatrix

Givet ligningssystem, find koefficientmatrix, totalmatrix

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3 \\ \phantom{-2x_1 +{}} 3x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 0 \end{cases}$$

koefficient-matrix: $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

totalmatrix

$$\begin{bmatrix} A & \vec{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & \frac{7}{2} & 0 \end{array}\right]$$

De 3 elementære rækkeoperationer

- Til række nr. j adderes en konstant k gange række nr. i.

$$[A\ \vec{b}] = \begin{bmatrix} - & - & \vec{r}_i & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & \vec{r}_j & - & - \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} - & - & \vec{r}_i & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & \vec{r}_j + k\vec{r}_i & - & - \end{bmatrix} = [B\ \vec{c}].$$

- Række nr. i og j ombyttes.

$$[A\ \vec{b}] = \begin{bmatrix} - & - & \vec{r}_i & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & \vec{r}_j & - & - \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} - & - & \vec{r}_j & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & \vec{r}_i & - & - \end{bmatrix} = [B\ \vec{c}].$$

- Række i ganges med en konstant $k \neq 0$.

$$[A\ \vec{b}] = \begin{bmatrix} - & - & \vec{r}_i & - & - \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} - & - & k\vec{r}_i & - & - \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} = [B\ \vec{c}].$$

$[A\ \vec{b}]$ og $[B\ \vec{c}]$ er rækkeækvivalente, og vi skriver $[A\ \vec{b}] \sim [B\ \vec{c}]$.
VIGTIGT! Løsningsmængden for et tilhørende ligningssystem ændres ikke ved disse rækkeoperationer!

Eksempler på rækkeoperationer

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 7 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2 \to R_2 \cdot 3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 15 & 6 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 7 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 7 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$\cdot 2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 7 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{R_3 \to R_3 - 2R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

$2 + (-1) \cdot (-2) = 4$

Trappeform

En matrix er på trappeform hvis:

- Eventuelle nulrækker er nederst i matricen
- Første indgang $\neq 0$ (fra venstre) i en række, er til højre for første indgang $\neq 0$ i rækken ovenfor
- Alle indgange nedenfor en første indgang $\neq 0$, er nul

En matrix er på *reduceret* trappeform hvis:

- Den er på trappeform
- Alle første indgange $\neq 0$ i rækkerne er 1
- En sådan indgang 1, er den eneste indgang $\neq 0$ i den pågældende søjle

Eksempel: matrix på trappeform

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$ trappeform!

reduceret trappeform? pivot = 1 √

$$\overset{R_1 \to R_1 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$ reduceret trappeform!

Reduktion til reduceret trappeform

Sætning

En given matrix A kan rækkereduceres til en og kun en matrix R på reduceret trappeform.

Pivot'er

Lad A være en $m \times n$-matrix og lad $A \sim R$, hvor R er på (reduceret) trappeform. En første indgang $\neq 0$ i en række R kaldes en *pivot*. De tilhørende søjler (i den oprindelige matrix A) kaldes *pivot søjler*.

Bestemme om et ligningssystem er konsistent

Er et ligningssystem konsistent?

i Skriv ligningssystemets totalmatrix $[A\ \vec{b}]$ op.

ii Reducer til trappeform. Hvis sidste søjle er en pivot-søjle, så er ligningssystemet ikke-konsistent. Ellers er det konsistent.

Eksempel

Ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & = & 6 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & = & -10 \end{array}$$

har totalmatricen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & -10 \end{array}\right] \overset{r_2 \to r_2 + r_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right].$$

Den sidste matrix er på trappeform. Der er ikke pivot i sidste søjle, så ligningssystemet er konsistent.

Generel løsning fra $[R\ \vec{c}]$

Betragt en totalmatrix

$$[R\ \vec{c}] = \left[\begin{array}{cccc|c} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} & c_1 \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} & c_m \end{array}\right]$$

hvor $m \times (n+1)$-matricen $[R\ \vec{c}]$ er på reduceret trappeform. Antag det tilhørende ligningssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} r_{11}x_1 & + & r_{12}x_2 & + & \cdots & + & r_{1n}x_n & = & c_1 \\ r_{21}x_1 & + & r_{22}x_2 & + & \cdots & + & r_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ r_{m1}x_1 & + & r_{m2}x_2 & + & \cdots & + & r_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

er konsistent.

løsning af ligningssystemet:

$$\begin{array}{ccccccccc} r_{11}x_1 & + & r_{12}x_2 & + & \cdots & + & r_{1n}x_n & = & c_1 \\ r_{21}x_1 & + & r_{22}x_2 & + & \cdots & + & r_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ r_{m1}x_1 & + & r_{m2}x_2 & + & \cdots & + & r_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

Fremgangsmåde:

(i) Identificer ikke-pivot søjler i R, disse svarer til frie variable.

(ii) Skriv det tilhørende ligningssystem op, flyt de frie variable over på højre side (gang evt med nul så alle frie variable optræder i alle ligninger).

(iii) Indfør parametre $(s, t, u, \ldots)$ for de frie variable, dette giver en simpel definitions-ligning for hver fri variabel (f.eks. $x_4 = s$).

(iv) Skriv ligningssystemet *og* definitionerne af de frie variable op som n ligninger, dette er den generelle løsning på parameterform.

(v) Gang evt med nul så alle parametre optræder i alle ligninger på højre side af den generelle løsning på parameterform. Nu kan den generelle løsning på parametriseret vektorform skrives op.

Generel løsning fra $[R\ \vec{c}]$. fortsat

Den generelle løsning på vektorform har typisk formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \vec{x} = \vec{d}_c + s\vec{d}_1 + t\vec{d}_2 + \cdots, \qquad (s, t, \ldots \in \mathbb{R}),$$

hvor vektoren $\vec{d}_c$ indeholder koordinaterne i $\vec{c}$ (evt. med nogle nuller tilsat).
Hvis der er mindst en fri variabel, findes der uendeligt mange løsninger (en for hvert valg af parametre).

Bemærk

Hvis alle søjler i R er pivot-søjler, så er der ikke nogle frie variable. I sådanne tilfælde er $R = \begin{bmatrix} I_n \\ -0- \end{bmatrix}$, og der findes *en* unik løsning, givet ved de første n koordinater af $\vec{c}$.

Antag at vi har totalmatricen

$$[R\ \vec{c}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Dette svarer til koefficientmatrix på reduceret trappeform:

$$1 \cdot x_1 + 0 x_2 + 1 \cdot x_3 = -5$$
$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 x_3 = 4$$

(i) Identificer ikke-pivot søjler i R, disse svarer til frie variable.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Pivot ingen pivot

Søjle 3 har ingen pivot

$\Rightarrow x_3$ fri variabel

(ii) Skriv det tilhørende ligningssystem op, flyt de frie variable over på højre side

$$\left.\begin{aligned} 1x_1 + 0\cdot x_2 &= -5 - x_3 \\ 0\cdot x_1 + 1 x_2 &= 4 - 3x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -5 - 1\cdot x_3 \\ x_2 &= 4 - 3x_3 \end{aligned}$$

(iii) Indfør parametre $(s, t, u, \ldots)$ for de frie variable

$$x_3 = s$$

$$\begin{cases} x_1 = -5 - s &= -5 + (-1)\cdot s \\ x_2 = 4 - 3\cdot s &= 4 + (-3)\cdot s \\ x_3 = s &= 0 + (1)\cdot s \end{cases}$$

generel løsning på param.form, $s \in \mathbb{R}$

Generel løsning fra $[R\vec{c}]$, eksempel

(iv) Skriv ligningssystemet *og* definitionerne af de frie variable op som n ligninger, dette er den generelle løsning på parameterform.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

(vektorform)

(v) Gang evt med nul så alle parametre optræder i alle ligninger på højre side af den generelle løsning på parameterform. Aflæs løsning på vektorform