# Rang og nullitet

## Definition: Rang og nullitet

Lad $A$ være en $m \times n$-matrix. Rangen af $A$, benævnt rank$(A)$, er antallet af pivot søjler i $A$. Nulliteten af $A$ er

$$\text{nullity}(A) := n - \text{rank}(A) = (\text{antallet af ikke-pivot søjler i } A),$$

## Bemærkning

Betragt et konsistent ligningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$.

- rank$(A)$ er præcis antallet af bundne variable i løsningsmængden.
- nullity$(A)$ er præcis antallet af frie variable i løsningsmængden.

# Gauss reduktion

Betragt to $\neq 0$-rækker i en matrix, hvis der er pivot i samme søjle i disse to rækker, kan en elementær rækkeoperation blive brugt til at lave en af disse pivoter til et nul.

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kj} & \cdots \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix} \quad (a_{ij}, a_{kj} \neq 0)$$

(Læg $-(a_{k,j}/a_{i,j})$ gange række nr. $i$ til række nr. $k$.)

**1/3. Bring matrix på trappeform:**

- i Start med søjle 1, hvis der er mere end en pivot, vælg en række ud, der skal "overleve" brug denne række til at ændre alle andre pivoter i søjle 1 til nul, som ovenfor.
- ii Fortsæt derefter til søjle 2, 3, etc.
- iii Når der højest er en pivot i hver søjle, byt om på rækkerne så matricen er på trappeform.

# Gauss reduktion, fortsat

## 2/3. normaliser alle pivot-elementer

Divider hver $\neq 0$-række med pivot'en i pågældende række. Så har alle pivot'er værdien 1. (gang *hele* pivot-rækken med $(1/pivot)$).

## 3/3. Lav pivot-søjler til standardvektorer

Start nu fra højre / sidste søjle / søjle $n$:

i Hvis der ikke er nuller over den sidst pivot (fra venstre), brug den nederste $\neq 0$ række til at lave alle indgange over den sidste pivot om til nul.

ii Hvis der nu ikke er nuller over den *næst*-sidste pivot (fra venstre), brug den *næst*-sidste $\neq 0$-række til at skabe nuller over den *næst*-sidste pivot...

iii fortsæt således indtil alle pivot-søjler kun består af et et-tal og resten nuller - dvs. indtil alle pivot-søjler er en standardbasis-søjlevektor.

# Spænd (span) af vektorer

Las $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Spændet af $S$ defineres som

$$\operatorname{span}(S) := \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k \mid c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}\},$$

dvs. som familien af *samtlige linearkombination* af vektorerne i $S$.

**Test: ligger $\vec{v}$ i span $S$?**

For $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gælder, at $\vec{v} \in \operatorname{span}(S)$ hvis og kun hvis ligningssystemet givet ved totalmatricen

$$[\vec{v}_1 \, \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_k | \vec{v}]$$

er konsistent (dvs. sidste søjle ikke en pivot-søjle).

# Udspændende vektorer

Vektorerne $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ i $\mathbb{R}^m$ siges at udspænde $\mathbb{R}^m$ når

$$\operatorname{span}(S) = \mathbb{R}^m.$$

## Ækvivalente betingelser

Betragt vektorerne $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ i $\mathbb{R}^m$, og lad $A = [\vec{v}_1 \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_k]$. Følgende betingelser er ækvivalente

- Vektorerne i $S$ udspænder $\mathbb{R}^m$
- $A\vec{x} = \vec{b}$ er konsistent for alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
- $A \sim R$, hvor $R$ har pivot i hver række.

## Bemærk

Vektorerne $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ i $\mathbb{R}^m$ har kun chance for at udspænde $\mathbb{R}^m$ når $k \geq m$. For $k < m$ er det umuligt.