

Matrix introduktion

Mikkel H. Brynildsen

5. september 2013

Operationer på vektorer i $\mathbb{R}^n$

Operationer

Lad $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, så $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$,
 $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Lad $r \in \mathbb{R}$ være et reelt tal.

Addition: $\vec{v} + \vec{u} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n)$,

Skalarmultiplikation: $r\vec{v} = (rv_1, rv_2, \dots, rv_n)$,

Prikprodukt: $\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$,

Længde: $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$,

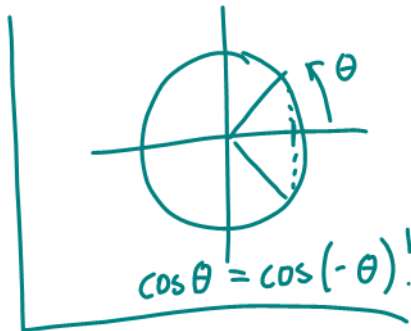
Afstand: $d(\vec{v}, \vec{u}) = \|\vec{v} - \vec{u}\|$

$$= \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + \dots + (v_n - u_n)^2}$$

Vinkel: $\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\|}$.



$\vec{u}$



$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\begin{matrix} \downarrow \\ \dots \end{matrix} \right)$$

Matricer og vektorer

$m \times n$ -matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, a_{ij} : \text{indgang } (i,j) \text{ i } A$$

Række- og søjlevektorer

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n].$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

3×3
 $m=3$
 $n=3$

$$(A)_{1,1} = 1$$

$$(A)_{1,2} = 2$$

$$(A)_{1,3} = 0$$

⋮

$$(A)_{3,3} = 7$$

$$3A$$

$$\left. \begin{aligned} (3A)_{1,1} &= 3 \cdot 1 = 3 \\ (3A)_{1,2} &= 3 \cdot 2 = 6 \\ (3A)_{2,3} &= 3 \cdot 5 = 15 \end{aligned} \right\}$$

for $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

$$(3A)_{i,j} = 3 \cdot (A)_{i,j}$$

Matrix sum, Matrix-vektor produkt

Sum

Lad A og B være $m \times n$ -matricer. Så er $m \times n$ -matricen $c_1A + c_2B$, hvor c_1 og c_2 er skalarer, givet ved

$$(c_1A + c_2B)_{i,j} = c_1(A)_{i,j} + c_2(B)_{i,j},$$

hvor $(C)_{i,j}$ betegner indgang (i,j) i matricen C .

Matrix-vektor produkt

Lad $A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \cdots \ \vec{a}_n]$ være en $m \times n$ -matrix med søjlevektorer $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. For $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ defineres

$$A\vec{v} = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \cdots \ \vec{a}_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + \cdots + v_n\vec{a}_n = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{v} \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{r}_m \cdot \vec{v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3], \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{bmatrix} \quad \vec{r}_1 = [1 \ 4 \ 7], \vec{r}_2 = [2 \ 5 \ 8]$$

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A\vec{V} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{det:}} -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 + 4 + 21 \\ -4 + 5 + 24 \\ -6 + 6 + 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 25 \\ 27 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(3) \times m}$$

Linearitet

Matrix-vektorproduktet opfylder følgende vigtige linearitetsegenskab: For en $m \times n$ -matrix A og $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gælder

$$A(r_1\vec{u} + r_2\vec{v}) = r_1A\vec{u} + r_2A\vec{v}$$

for alle skalarer r_1 og r_2 .

Identitetsmatricen

Identitetsmatricen $I_n := [a_{ij}]$ er den $n \times n$ -matrix, der har indgangene

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}; \quad \text{f.eks. } I_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Søjlevektorerne i I_n benævnes $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Matricens navn er en konsekvens af, at $I_n\vec{v} = \vec{v}$ for alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Den transponerede

Definition

For en $m \times n$ -matrix $A = [a_{ij}]$ defineres den transponerede til A som $n \times m$ -matricen givet ved $A^T := [a_{ji}]$. Dvs søjler i A bliver til rækker i A^T og vice versa.

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -7 \\ -3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 3 & -7 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ex) prove that If B is a square matrix,
then $B + B^T$ is symmetric.

bevis

Skal vise: $(B + B^T)_{i,j} = (B + B^T)_{j,i}$

$$\begin{aligned} (B + B^T)_{i,j} &= (B)_{i,j} + (B^T)_{i,j} && \begin{array}{l} \text{(tenk:} \\ 1 \leq i, j \leq n, \text{ fast)} \end{array} \\ &= (B)_{i,j} + (B)_{j,i} && \begin{array}{l} \leftarrow \text{sum at} \\ \text{matrice} \end{array} \\ &= (B)_{i,j} + (B)_{j,i} && \begin{array}{l} \leftarrow \text{def. of} \\ \text{transpose} \end{array} \end{aligned}$$

$$= (B^T)_{j,i} + (B)_{j,i} \quad \swarrow \quad \swarrow \text{(sum)}$$

$$= (B)_{j,i} + (B^T)_{j,i} = \underline{(B+B^T)_{j,i}}$$