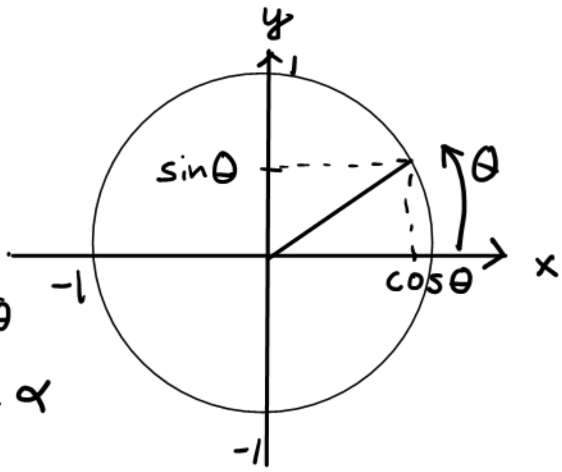
LIAL, Hold 1, Forelæsning 2, 5/9.

Rotationsmatrix (i $\mathbb{R}^2$)

Husk:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad (\text{idiotformelen})$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta \\ \sin(\alpha+\theta) = \cos\alpha\sin\theta + \cos\theta\sin\alpha \end{cases}$$



$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ex $A_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A_{\frac{\pi}{2}\,\text{rad}}$

ex

$\vec{w} = A\vec{v}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$,

$$\vec{w} = A\vec{v} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$= x_0 \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + y_0 \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_0 \cos\theta - y_0 \sin\theta \\ x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

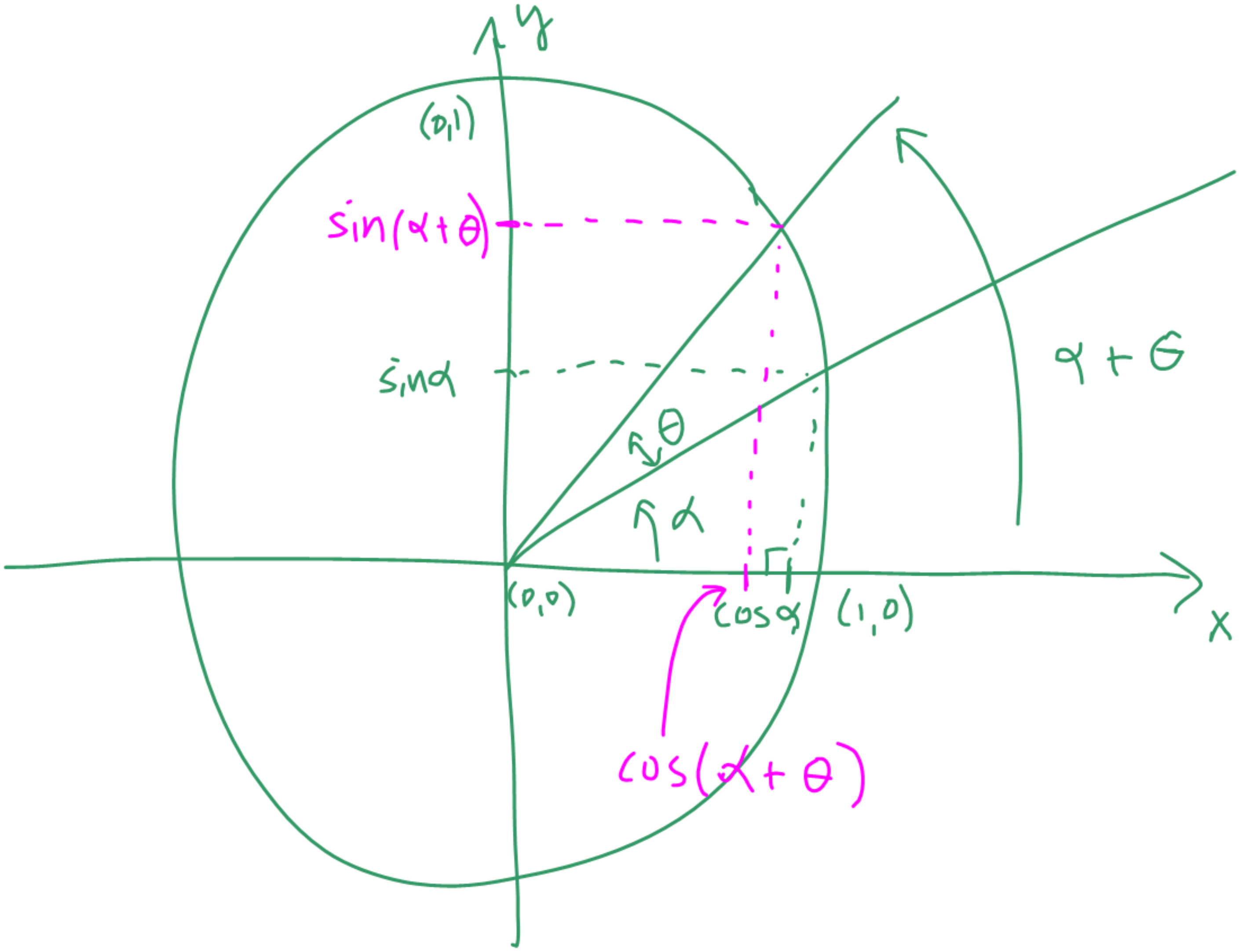
$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(x_0 \cos\theta - y_0 \sin\theta)^2 + (x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta)^2}$$

$$(x_0 \cos\theta - y_0 \sin\theta)^2 = x_0^2 \underline{\cos^2\theta} + y_0^2 \sin^2\theta \cancel{- 2x_0 y_0 \sin\theta\cos\theta}$$

$$+ (x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta)^2 = x_0^2 \underline{\sin^2\theta} + y_0^2 \cos^2\theta \cancel{+ 2x_0 y_0 \sin\theta\cos\theta}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{x_0^2 (\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) + y_0^2 (\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1})}$$

$$= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \|\vec{v}\|, \text{ rotation!}$$

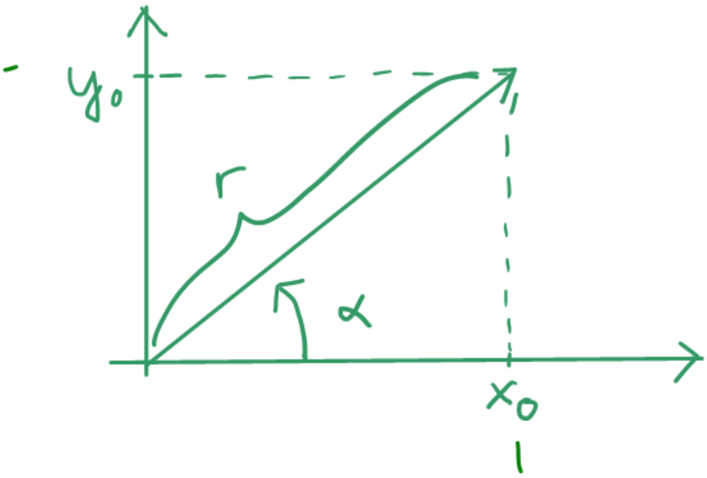

y
(0,1)
sin(α+θ)
sinα
θ
α
α+θ
(0,0)
cosα
(1,0)
x
cos(α+θ)

$\|\vec{w}\| =$

se ovenfor

polare koord.

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$



$$\vec{w} = r \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \theta) \\ \sin(\alpha + \theta) \end{bmatrix}$$

$$= r \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\theta - \sin\alpha \sin\theta \\ \cos\alpha \sin\theta + \sin\alpha \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_0 \cos\theta - y_0 \sin\theta \\ x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= x_0 \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + y_0 \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Opsamling på Afsnit 1.2: Linearitet af Matrix-vektorprodukt

standardvektorer i $\mathbb{R}^n$: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$

identitetsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

nulmatrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_j = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{plads } j, \\ \\ \\ \end{array}$$

a) $A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$

b) $A(c\vec{u}) = c(A\vec{u}) = (cA)\vec{u}$

c) $(A+B)\vec{u} = (A\vec{u}) + (B\vec{u})$

d) $A = [\vec{a}_1 \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_n] \Rightarrow A\vec{e}_j = \vec{a}_j \quad , \ 1 \leq j \leq n.$

h) $I_n \vec{v} = \vec{v}.$

$\cancel{\vec{v}A}$

Lineære Ligningssystemer:

Vi betragter det lineære ligningssystem

$$
* \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

Løsningsmængde: familien af samtlige løsninger til (*)
Er løsningsmængden tom, da kaldes systemet ikke-konsistent.

Systemets totalmatrix / udvidede koefficientmatrix:

$$
[A \ \vec{b}] = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_n \,|\, \vec{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right]
$$

Løsningsmetode: Reducer $[A \ \vec{b}]$ til reduceret trappeform ("reduced echelon form") $[R \ \vec{c}]$.
Systemet givet ved $[R \ \vec{c}]$ har samme løsningsmængde som $[A \ \vec{b}]$.

De 3 elementære rækkeoperationer:

Husk: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{bmatrix}$ ← række

← søjle.

* Til række nr. j adderes en konstant gange række nr. i

$$\begin{bmatrix} — \vec{r}_i — \\ \\ — \vec{r}_j — \end{bmatrix} \xrightarrow{\vec{R}_j = \vec{R}_j + k\vec{R}_i} \begin{bmatrix} — \vec{r}_i — \\ \vdots \\ — \vec{r}_j + k\vec{r}_i — \end{bmatrix}$$

* Række nr. i og j ombyttes

$$\begin{bmatrix} — \vec{r}_i — \\ \\ — \vec{r}_j — \end{bmatrix} \xrightarrow{\vec{R}_i \leftrightarrow \vec{R}_j} \begin{bmatrix} — \vec{r}_j — \\ \\ — \vec{r}_i — \end{bmatrix}$$

* Række i ganges med en konstant $k \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ — \vec{r}_i — \\ \vdots \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \vdots \\ — k\vec{r}_i — \\ \vdots \end{bmatrix}$$

VIGTIGT: Løsningsmængden for et tilhørende ligningssystem ændres ikke ved disse rækkeoperationer!

Skriver $A \sim A_1 \sim A_2 \sim B$, $A \sim B$ rækkeækvavilente

Trappeform

En matrix er på trappeform hvis:

* Eventuelle nulrækker er nederst i matricen.
* Første indgang $\neq 0$ (fra venstre) i en række, er til højre for første indgang $\neq 0$ i rækken ovenfor.
* Alle indgange nedenfor en første indgang $\neq 0$, er nul.

En matrix er på <u>reduceret</u> trappeform hvis:

* den er på trappeform
* Alle første indgange $\neq 0$ i rækkerne er 1
* En første indgang 1, er den eneste indgang $\neq 0$ i den pågældende søjle.

ex

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 40 & 30 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sætning:

En given matrix A kan rækkereduceres til én, og kun en matrix R på reduceret trappeform.

Definition: "Pivot"

Lad A være en $m \times n$ matrix og lad $A \sim R$, hvor R er på (reduceret) trappeform. En første indgang $\neq 0$ i en række i R kaldes en <u>pivot</u>. De tilhørende søjler (i den oprindelige matrix A) kaldes <u>pivotsøjler</u>.

Sætning: Konsistent ligningssystem:

Ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ er konsistent hvis og kun hvis $\vec{b}$ er en linearkombination af A's søjler. Det sker præcis når sidste søjle i totalmatricen $[A\ \vec{b}]$ ikke er en pivotsøjle.

Bemærk:

reduceret trappeform

hvis $$[A\ \vec{b}] \sim \dots \sim [R\ \vec{c}] = \left[\begin{array}{cccccc|c} & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

svarer til

$$0 = 0 \cdot x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 1,$$ ingen $\vec{x}$ løser!

Generel løsning fra $[R\ \vec{c}]$:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & r_{14} & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 & r_{24} & 0 & r_{26} & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{36} & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

svarer til:

$$(*_2)\ \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + r_{14}x_4 + 0x_5 + 0x_6 = c_1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + r_{24}x_4 + 0x_5 + r_{26}x_6 = c_2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + r_{36}x_6 = c_3 \end{cases}$$

ikke-pivot søjler (søjle 2,4,6) svarer til frie variable.
Flyt i $(*_2)$ de frie variable over på højre side i ligningen:

$$(*_3)\ \begin{cases} x_1 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_5 = c_1 - 0\cdot x_2 - r_{14}x_4 - 0\cdot x_6 \\ 0\cdot x_1 + x_3 + 0\cdot x_5 = c_2 - 0\cdot x_2 - r_{24}x_4 - r_{26}x_6 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_5 = c_3 - 0\cdot x_2 - 0\cdot x_4 - r_{36}x_6 \end{cases}$$

Betragt $(*_3)$. Nu kan vi forsimple v. siden ved at slette alle nul-led: (NB! vi beholder nul-led på højre-siden!)

$$(*_4)\ \begin{cases} x_1 = c_1 - 0\cdot x_2 - r_{14}x_4 - 0x_6 \\ x_3 = c_2 - 0\cdot x_2 - r_{24}x_4 - r_{26}x_6 \\ x_5 = c_3 - 0\cdot x_2 - 0\cdot x_4 - r_{36}x_6 \end{cases}$$

Vi indfører nu "parametre" for hver af de frie variable

$$(*_5)\ \begin{cases} x_2 = s \\ x_4 = t \\ x_6 = u \end{cases} \qquad (s,t,u \in \mathbb{R})$$

Ved at skrive $(*_4)$ og $(*_5)$ i samme system får vi løsningsmængden på parameter-form:

$$(*_6)\quad \begin{cases} x_1 = c_1 + 0\cdot s - r_{14}t + 0\cdot u \\ x_2 = 0 + 1\cdot s + 0\cdot t + 0\cdot u \\ x_3 = c_2 + 0\cdot s - r_{24}t - r_{26}\cdot u \\ x_4 = 0 + 0\cdot s + 1\cdot t + 0\cdot u \\ x_5 = c_3 + 0\cdot s + 0\cdot t - r_{36}\cdot u \\ x_6 = 0 + 0\cdot s + 0\cdot t + 1\cdot u \end{cases}$$

$(*_6)$ kan nu skrives på vektor-form:

$$(*_7)\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_2 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -r_{14} \\ 0 \\ -r_{24} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_{26} \\ 0 \\ -r_{36} \\ 1 \end{bmatrix}$$

For hvert valg af parametre $s, t, u \in \mathbb{R}$ genererer $(*_6)$ og $(*_7)$ en løsning til $(*_2)$. Hvis der ikke er nogle frie variable (dvs. alle søjler i R er pivotsøjler, dvs. $R = I_n$) er der kun ēn unik løsning, givet ved vektoren $\vec{c}$ (hvis ligningssystemet er konsistent).