Rang og nullitet

Definition: Rang og nullitet

Lad A være en $m \times n$-matrix. Rangen af A, benævnt $\text{rank}(A)$, er antallet af pivot søjler i A. Nulliteten af A er

$$\text{nullity}(A) := n - \text{rank}(A) = (\text{antallet af ikke-pivot søjler i } A),$$

Bemærkning

Betragt et konsistent ligningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$.

- $\text{rank}(A)$ er præcis antallet af bundne variable i løsningsmængden.
- $\text{nullity}(A)$ er præcis antallet af frie variable i løsningsmængden.

Rang og nullitet, eksempler

Find Rand og nullitet

Rækkeop.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 2 & -4 \\ 3 & -9 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -9 & 8 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 pivot søjler

2 ikke-pivot-søjler

$\Rightarrow \operatorname{Rank}(A) = 2, \operatorname{Nullity}(A) = 2$

Gauss reduktion

Betragt to $\neq 0$-rækker i en matrix, hvis der er pivot i samme søjle i disse to rækker, kan en elementær rækkeoperation blive brugt til at lave en af disse pivoter til et nul.

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kj} & \cdots \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix} \qquad (a_{ij}, a_{kj} \neq 0)$$

(Læg $-(a_{k,j}/a_{i,j})$ gange række nr. i til række nr. k.)

1/3. Bring matrix på trappeform:

i. Start med søjle 1, hvis der er mere end en pivot, vælg en række ud, der skal "overleve" brug denne række til at ændre alle andre pivoter i søjle 1 til nul, som ovenfor.

ii. Fortsæt derefter til søjle 2, 3, etc.

iii. Når der højest er en pivot i hver søjle, byt om på rækkerne så matricen er på trappeform.

Gauss reduktion, fortsat

2/3. normaliser alle pivot-elementer

Divider hver $\neq 0$-række med pivot'en i pågældende række. Så har alle pivot'er værdien 1. (gang *hele* pivot-rækken med $(1/pivot)$).

3/3. Lav pivot-søjler til standardvektorer

Start nu fra højre / sidste søjle / søjle n:

i Hvis der ikke er nuller over den sidst pivot (fra venstre), brug den nederste $\neq 0$ række til at lave alle indgange over den sidste pivot om til nul.

ii Hvis der nu ikke er nuller over den *næst*-sidste pivot (fra venstre), brug den *næst*-sidste $\neq 0$-række til at skabe nuller over den *næst*-sidste pivot...

iii fortsæt således indtil alle pivot-søjler kun består af et et-tal og resten nuller - dvs. indtil alle pivot-søjler er en standardbasis-søjlevektor.

Gauss reduktion, eksempel

(opg. 1.4.11) Starter med ligningssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ -2x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & & & = & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

totalmatrix: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -6 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right]$

$R_2 \to R_2 + 2R_1$ $\sim$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right]$

totalmatrix:

$$R_3 \to R_3 - R_1 \quad \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$R_3 \to R_3 - R_2 \quad \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right] \quad \text{(ikke konsistent)}$$

$$R_3 \to \left(-\frac{1}{12}\right) R_3 \quad \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_1 \to R_1 - R_2 \quad \sim \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} R_1 \to R_1 + 8R_3 \\ \sim \\ R_2 \to R_2 - 11R_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

red. trappeform ✓

Spænd (span) af vektorer

Las $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Spændet af S defineres som

$$\mathrm{span}(S) := \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}\},$$

dvs. som familien af *samtlige linearkombination* af vektorerne i S.

Test: ligger $\vec{v}$ i span S?

For $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gælder, at $\vec{v} \in \mathrm{span}(S)$ hvis og kun hvis ligningssystemet givet ved totalmatricen

$$[\vec{v}_1\,\vec{v}_2\,\cdots\,\vec{v}_k\,|\,\vec{v}]$$

er konsistent (dvs. sidste søjle ikke en pivot-søjle).

$\mathbb{R}^2$ (planen)

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

$c_1 = 1, \ c_2 = 1$

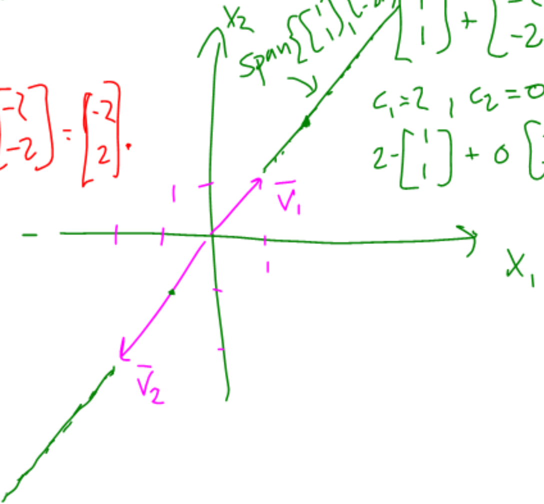
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$c_1 = 2, \ c_2 = 0$

$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

ingen x_1, x_2



Udspændende vektorer

Vektorerne $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ i $\mathbb{R}^m$ siges at udspænde $\mathbb{R}^m$ når

$$\operatorname{span}(S) = \mathbb{R}^m.$$

Ækvivalente betingelser

Betragt vektorerne $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ i $\mathbb{R}^m$, og lad $A = [\vec{v}_1 \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_k]$. Følgende betingelser er ækvivalente

- Vektorerne i S udspænder $\mathbb{R}^m$
- $A\vec{x} = \vec{b}$ er konsistent for alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
- $A \sim R$, hvor R har pivot i hver række.

Bemærk

Vektorerne $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ i $\mathbb{R}^m$ har kun chance for at udspænde $\mathbb{R}^m$ når $k \geq m$. For $k < m$ er det umuligt.

Eksempel, er $\vec{v}$ i span(S)?

$$\text{Er } \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ i span}\left(\underbrace{\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}}_{=S}\right)$$

findes der $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, så $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$?

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 2 \\ \phantom{1 \cdot x_1 - {}} x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \overset{R_3 \to R_3 - R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

totalmatrix

$$\overset{R_3 \to R_3 - 2R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

ikke konsistent

↓

findes ikke x_1, x_2, x_3

så...

↓

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \notin \operatorname{span}(S)$$

Eksempel, for hvilke r er $\vec{v}(r)$ i span(S)?

For hvilke $r \in \mathbb{R}$ er $\begin{bmatrix}1\\r\\2\end{bmatrix}$ i span $\left(\underbrace{\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-2\\2\end{bmatrix}\right\}}_{=S}\right)$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & r\\ -1 & 2 & 2\end{array}\right] \underset{R_3 \to R_3 + R_1}{\overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & r-2\\ 0 & 1 & 3\end{array}\right]$$

$$\overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & r-2\end{array}\right],$$

systemet er ikke-konsist. hvis $r-2 \neq 0$

Eksempel, er $A\vec{x} = \vec{b}$ konsistent for alle $\vec{b}$?

Betragt $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ Lad $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ være givet. Kan vi finde $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ så $A\vec{x} = \vec{b}$? (det samme som $A\vec{x} = \vec{b}$ konsistent!)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b_1 \\ 2 & -4 & b_2 \end{array}\right] \overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - 2b_1 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ systemet er kun konsistent, hvis

$b_2 - 2b_1 = 0 \iff b_2 = 2b_1$

Svar er: nej, $A\vec{x} = \vec{b}$ er ikke kons. for alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$