Et lille eksempel

$$7\underbrace{\begin{bmatrix}3\\-2\\4\\1\end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} + -2\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}}_{\vec{v}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix}19\\-14\\26\\7\end{bmatrix}}_{\vec{v}_3}$$

Det viser at ligningen

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \begin{bmatrix}3 & 1 & 19\\-2 & 0 & -14\\4 & 1 & 26\\1 & 0 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \vec{0}$$

har løsningen

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -1$$

Vi siger at $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ er lineært afhængige.

Lineær (u)afhængighed

Vektorerne $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ i $\mathbb{R}^m$ siges at være *lineært uafhængige* hvis

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_k\vec{v}_k = \vec{0},$$

kun har løsningen $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$.

På matrixform

Lad $A = [\vec{v}_1 \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n]$ være en $m \times n$-matrix. A's søjler er lineært uafhængige præcis når ligningssystemet

$$A\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

ingen fri variable har. Dvs når $A = [\vec{v}_1 \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n]$ har pivot-søjle i hver søjle (eller tilsvarende når $\text{rank}(A) = n$).

Eksempel

En samling af n vektorer i $\mathbb{R}^m$, med $n > m$, er altid lineært afhængig, da vi har $\text{rank}(A) \leq m < n$, hvor A er som ovenfor.

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$, $\vec{v}_j = \begin{bmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \\ \vdots \\ v_{mj} \end{bmatrix}$

$$A = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix}$$ $\leadsto$ $m \times n$ matrix

højest have m pivot søjler! (der er kun m rækker)

$\Rightarrow$ hvis $n > m$ $\Rightarrow$ så kan alle søjlerne ikke være pivotsøjler

$\Rightarrow$ $A\vec{x} = \vec{0}$ har ikke-nul løsninger (der findes mindst én fri variabel)

$\Rightarrow$ $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ lin. afh!

Lineær afhængighed

$\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ er lineært afhængige

$$\Updownarrow$$

Der findes en ikke-nul løsning $\vec{x}$ til $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\Updownarrow$$

$\text{nullity}(A) \neq 0$

$$\Updownarrow$$

antallet af ikke-pivot søjler i A er forskelligt fra nul.

Lineær uafhængighed

$\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ er lineært uafhængige

$$\Updownarrow$$

Der findes kun løsningen $\vec{x} = 0$ til $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\Updownarrow$$

$\text{nullity}(A) = 0$

$$\Updownarrow$$

Alle søjler i A er pivot-søjler.

Eksempler

- bestem om en mængde vektorer er lineært ahængige (lin.afh.)
- Find en lille delmængde af af $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ med samme span som S.
- Bestem for hvilke r, $S = \{\vec{w}(r), \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ er lin. afh.

ex

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

koefficient matrix

$$A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

skal vise:

\# (ikke-pivot søjler i A) $\neq 0$ ✓

$$\underset{R_2 \to R_2 - 3R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot

$\Rightarrow$ søjle 2 er ikke-pivot søjle

$\Rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ er lineært afhængig.

(ex) Udtynd $S = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_3} \right\}$ til

$\tilde{S}$ der er lineært uafh.

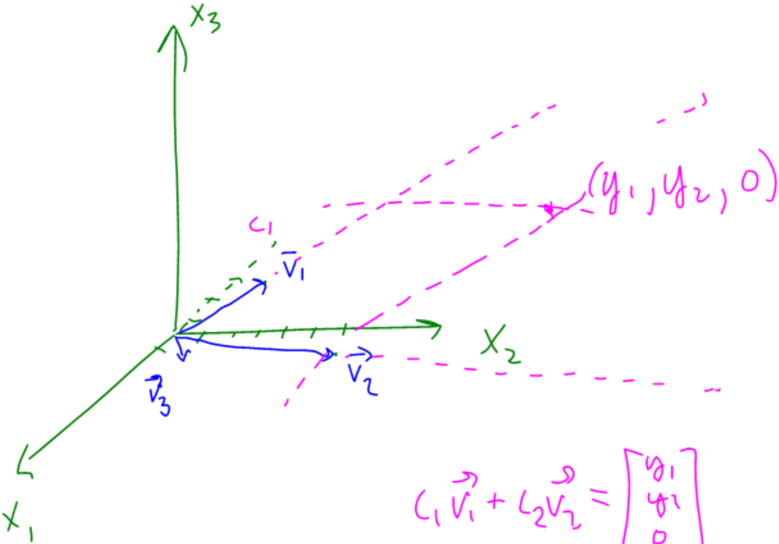
koefficient matrix: $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cancel{\vec{v}_3} \end{bmatrix}$

$R_1 \to 2R_1$
$R_2 \to 3R_2$

$$\sim \begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 6 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \sim \begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 0 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot søjle — pivot søjle — ikke pivot søjle

$\tilde{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ så $\operatorname{span}(S) = \operatorname{span}(\hat{S})$



$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matlab

- m-fil
- indtaste matrix og vektor $A = [1\ 2\ 3; 4\ 5\ 6; 7\ 8\ 9]$ giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- matrix-vektor produkt i Matlab $A * v$.