Antag $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ i $\mathbb{R}^m$ $\quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{1m} \end{bmatrix}$

og de er lineært uafhængige (lin. uafh.)

så har matricen $A = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k]$

pivot i hver søjle $\quad A \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \end{bmatrix} = R$

$$\begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} = R$$

Kan det ske, at $\vec{v}_2 = c_1\vec{v}_1 + c_3\vec{v}_3 + \dots + c_k\vec{v}_k$

(altså, kan det ske, at $\bar{v}_2$ er en linearkomb.
af $\{\bar{v}_1, \bar{v}_3, \ldots, \bar{v}_k\}$?

$$\vec{v}_2 = \underbrace{\left[\bar{v}_1 \, \bar{v}_3 \cdots \bar{v}_k\right]}_{= B} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \iff B\vec{c} = \vec{v}_2$$

totalmatrix: $\left[B \mid \vec{v}_2\right] \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$

pivot-søjle

$\to \left[B \mid \bar{v}_2\right]$ ikke-konsistent, findes ingen $c_1 \cdots c_k$
så ...

Lineære afbildninger

Lineære transformationer

En **lineær** transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en afbildning (funktion) med definitionsmængde $\mathbb{R}^n$ og kodomæne $\mathbb{R}^m$, der opfylder

- $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}), \qquad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$
- $T(r\vec{u}) = rT(\vec{u}), \qquad r \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n.$

Eksempel

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2) = (3x_1 + 2x_2)$. T er linær, fordi

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = 3(u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2)$$

$$= (3u_1 + 2u_2) + (3v_1 + 2v_2) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}).$$

$$T(2\vec{v}) = 3(2v_1) + 2(2v_2) = 2(3v_1 + 2v_2) = 2T(\vec{v}).$$

Eksempel

$T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 3x_1 + x_2, -x_1 + 4x_2)$

- Lineær?
- Definitionsmængde?
- Kodomæne?
- Find $T(4, 3)$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

i $\mathbb{R}^2$: $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

linearitet

$T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = T(4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) = T(4\vec{e}_1) + T(3\vec{e}_2)$

linearitet

$$= 4T(\vec{e}_1) + 3T(\vec{e}_2) = 4\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}4\cdot 1 + 3(-2)\\4\cdot 3 + 3\cdot 1\\4(-1) + 3\cdot 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\15\\8\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

standard -matricen for T

$$\begin{bmatrix}T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2)\end{bmatrix}$$

Eksempel

$$T(x_1, x_2) = (x_1^2, 3x_1 + x_2, -x_1 + 4x_2)$$

- Lineær?

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (u_1+v_1)^2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^2 + v_1^2 + 2v_1u_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\neq$$

$$T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1^2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1^2 \\ \\ \end{bmatrix}$$

T ikke lineær!

Standardmatricen

Identitetsmatricen

Identitetsmatricen $I_n := [a_{ij}]$ er den $n \times n$-matrix, der har indgangene

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}; \quad \text{f.eks.} \quad I_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Søjlevektorerne i I_n benævnes $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Bestemmelse af standardmatricen

Givet en lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da findes der en entydigt bestemt $m \times n$-matrix (standardmatricen) A, der opfylder $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. A er givet ved

$$A = [T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \quad \cdots \quad T(\vec{e}_n)].$$

Standardmatrice: Eksempel I

Transformation givet

Lad $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være give ved
$T(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_2, -x_1 - 4x_2)$.

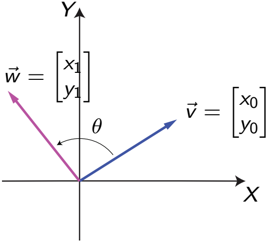
- T er lineær
- T's standardmatrix er givet ved

$$A = [T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2)] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$T(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_2, -x_1 - 4x_2)$$

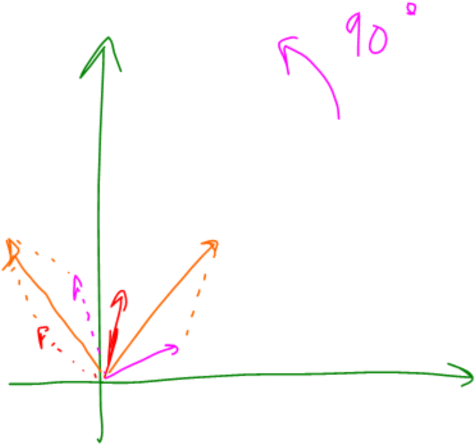
Rotationsmatrix genbesøgt

Betragt rotationen i planen $\mathbb{R}^2$ med en vinkel θ.



Hvis $\theta = 45^\circ$ Skriv $B = A_{45^\circ}$, Find $T_B(\vec{e}_1)$, $T_B(\vec{e}_2)$ og til sidst $A_{45^\circ} = [T_B(\vec{e}_1), T_B(\vec{e}_2)]$. Sammenlign med

$$A_\theta \vec{v} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



lineær?

er det samme, at

1) rotere → legge sammen

||?

2) legge sammen → rotere

$T(\vec{x}) =$ roter $\vec{x}$ $\cancel{45}^\circ$ 90° (imod uret).

$T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2)$?

$$A_{90^\circ} = \left[T(\vec{e}_1) \; T(\vec{e}_2) \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix}$$