Angående dagens opgaver; for en lineær funktion med standardmatrix.

dimension af definitionsmængde = antal søjler

dimension af dispositionsmængde = antal rækker

pivot i alle søjler <=> injektiv (one-to-one)

pivot i alle rækker <=> surjektiv (onto)

T lineær $\rightarrow$ $A = [T(\vec{e}_1) \dots T(\vec{e}_n)]$

A givet $\rightarrow$ $T_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Eksempel

Sæt $\vec{v} = (1, 2)$.

1. Rotér $\vec{v}$ 45°.

$$A_{45^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix}$$

2. Multiplicér $\vec{w} = A_{45^\circ}\vec{v}$ med matricen

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \vec{w} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix} + \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

Eksempel

Sæt $\vec{v} = (1, 2)$.

1. Rotér $\vec{v}$ 45°.

$$A_{45^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix}$$

2. Multiplicér $\vec{w} = A_{45^\circ}\vec{v}$ med matricen

$$\begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Matrixprodukt

Definition

Lad A være en $m \times n$-matrix og B være en $n \times p$-matrix givet ved søjlevektorerne $B = [\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \cdots \quad \vec{b}_p]$. Så defineres produktet AB som den $m \times p$-matrix, der er givet ved

$$AB = [A\vec{b}_1 \quad A\vec{b}_2 \quad \cdots \quad A\vec{b}_p].$$

Pr. definition gælder $(AB)\vec{x} = A(B\vec{x})$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$.

Indgang (i,j) i AB

Vi har ligeledes

$$(AB)_{i,j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \vec{r}_i \cdot \vec{b}_j,$$

dvs. prikproduktet mellem rækkevektor $\vec{r}_i$ fra A og søjlevektor $\vec{b}_j$ fra B.

Hvis B er en $m \times n$ matrix, og $\vec{v}, \vec{w}$ er vektorer i $\mathbb{R}^n$, så husker vi lineariteten af matrix-vektor produktet:

$$B(\vec{v} + \vec{w}) = B\vec{v} + B\vec{w}, \qquad B(s\vec{v}) = s(B\vec{v}), \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Lad $B = [\vec{b}_1 \vec{b}_2 \cdots \vec{b}_n]$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ og lad A være en $k \times m$ matrix

$$B\vec{v} = [\vec{b}_1 \vec{b}_2 \cdots \vec{b}_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots + v_n\vec{b}_n,$$

så på grund af linearitet:

$$A(B\vec{v}) = A(v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots + v_n\vec{b}_n) = v1(A\vec{b}_1) + v_2(A\vec{b}_2) + \cdots + v_n(A$$

$$AB = [A\vec{b}_1 \ A\vec{b}_2 \ \cdots \ A\vec{b}_n]$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^m \arrow[dr, "A"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "B"] \arrow[rr, "AB"'] & & \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}$$

Ved sammensætning af matricer: til højre $=$ først. Generelt for funktioner

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k$$

skriver man $g \circ f$ for funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ defineret ved $(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$, for matrix multiplikation skriver vi bare $AB\vec{x}$.

$$A_{45} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A_{45} B = \begin{bmatrix} \underline{A_{45} \vec{b}_1} & A_{45} \vec{b}_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A_{45} \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\left(3\cancel{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\cancel{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3-2 \\ 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

er svaret på spørgsmålet hvad er sammensætningen

n) 1) roter 45°, 2) gang med $\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$

2

$$A_{45}\vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\left(0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-\cancel{\sqrt{2}})\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

så $A_{45}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

2×3 $\qquad\qquad$ 3×3

AB er en 2×3 matrix

$2 \times \underline{3}$ $\underline{3} \times 3$

$[B]$: $\qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$[A]\,[AB]$ $\qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot 1, & 4 & 9 \\ \boxed{0\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 0}, & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 0 & 4\cdot 1 + 6\cdot 0 \\ 3\cdot 0 + 2\cdot 1 & 4\cdot 0 + 6\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(BA = B)$$

År n: x_n mus
y_n rave

model: $$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -400 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -400 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & -400 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \right) \right)$$

Egenskaber af matrixprodukt

A, B $k \times m$ matricer. C $m \times n$ matrix. P, Q $n \times p$ matricer.

1. $s(AC) = (sA)C = A(sC)$ for alle skalarer s
2. $A(CP) = (AC)P$.
3. $(A + B)C = AC + BC$.
4. $C(P + Q) = CP + CQ$.
5. $I_k A = A = AI_m$.
6. Produktet mellem enhver matrix og en nul-matrix er en nul-matrix.
7. $(AC)^T = C^T A^T$.