Invertible matricer

Definition

En $n \times n$ matrix A er **inverterbar** (invertibel), hvis der findes en $n \times n$ matrix C, således

$$CA = I_n \qquad AC = I_n.$$

I givet fald er C entydigt bestemt, og vi skriver $A^{-1} = C$.

Regneregler

Lad A og B være invertible $n \times n$ matricer. Så gælder,

- A^{-1} er invertibel med $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- AB er invertibel med $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- A^T er invertibel med $(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0,5 & 0 & -0,25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0,5 & 0 & -0,25 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\cdot 7-3\cdot 2+0\cdot 0,5, & 1\cdot(-3)+3\cdot 1+0\cdot 0 \\ 0\cdot 7-1\cdot 2+4\cdot 0,5, & 0\cdot(-3)+1\cdot 1+4\cdot 0 \\ 2\cdot 7+6\cdot(-2)-4\cdot 0,5, & \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0,5 & 0 & -0,25 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Elementære matricer

Definition

En elementær $n \times n$ matrix E, er en matrix som er fremkommet ved at udføre *netop én* rækkeoperation på I_n.

Eksempler

$R_2 \to -6R_2$ $\qquad$ $R_3 \to R_3 + 4R_1$ $\qquad$ $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elementære matricer II

Faktum:

Multiplikation med en elementær $m \times m$ matrix E fra venstre på en $m \times n$ matrix A, udfører den rækkeoperation som 'dannede' E fra I_m, direkte på A.

Eksempler

$$E_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 4a+g & 4b+h & 4c+i \end{bmatrix}$$

$$E_3A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Trappeform og elementære matricer

Reduktion til trappeform

Lad A være en $m \times n$ matrix. Vi kan ved et antal (lad os sige p) elementære rækkeoperationer reducere A til dens reducerede trappeform R. Hver af disse rækkeoperationer kan 'udføres' af en elementær $m \times m$-matrix E_j, $j = 1, 2, \ldots, p$. Dvs. vi har

$$A \sim E_1 A \sim E_2(E_1 A) \sim \cdots \sim E_p(E_{p-1} \cdots E_1 A) = R.$$

Vi kan derfor skrive kort, at

$$R = FA,$$

hvor

$$F = E_p E_{p-1} \cdots E_1.$$

Trappeform og elementære matricer II

Faktum II:

Elementære matricer er invertible da rækkeoperationer er 'invertible'. Eksempler:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\4&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-6&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{6}&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

Matrix relateret til sin trappeform via invertibel matrix

En $m\times n$-matrix A kan derfor relateres til sin reducerede trappeform R via

$$R=FA,$$

hvor

$$F=E_pE_{p-1}\cdots E_1$$

er en invertibel $m\times m$-matrix (da F er et produkt af invertible elementære matricer).

Algoritme til matrix inversion

Brug elementære rækkeoperationer til at transformere $[A\ I_n]$ til $[R\ B]$ hvor R er på reduceret trappeform. Hvis $R = I_n$, så er A invertibel, og $A^{-1} = B$. Hvis $R \neq I_n$, så er A ikke invertibel.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{A} \qquad \underbrace{}_{I_3}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_3} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - 0{,}5\,R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -0{,}5 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \to \frac{1}{4} R_2$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -0{,}5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & -0{,}5 & -3 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} = A^{-1}$$

$$A^{-1}\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x} \right) \right)$$

Invertibilitet og bijektivitet

Faktum III:

Hvis A er en $n \times n$-matrix, og $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$, så er følgende udsagn ækvivalente:

- T_A er bijektiv - dvs, injektiv og surjektiv. (T_A "tager forskellige vektorer til forskellige vektorer", og "ramme alle vektorer i $\mathbb{R}^n$").
- A er invertibel (kan f.eks. checkes ved at se at $A \sim \ldots \sim I_n$)

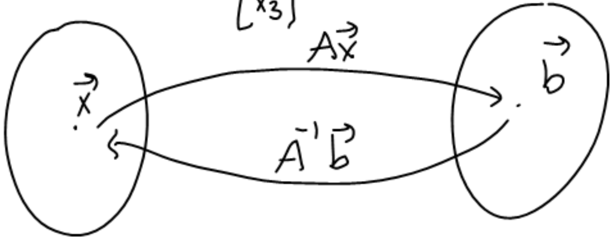
ligningssystem $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$\sim \dots \sim$

$$\left[\begin{array}{c|c} & b_1 \\ A & b_2 \\ & b_3 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array}\right] = [R \mid \vec{c}\,]$$

$[R \mid \vec{c}\,]$ totalmatrix for $\left.\begin{array}{l} 1 \cdot x_1 + 0x_2 + 0x_3 = c_1 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = c_2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1 \cdot x_3 = c_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = c_3 \end{array}$

$\mathbb{R}^3$ $\qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbb{R}^3$



$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{b} \qquad \left[A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right] \sim \cdots \sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \,\middle|\, A^{-1} \right]$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I_3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{x}$$

$T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$, hvis A^{-1} findes

(dvs. A inverterbar)

så er T_A injektiv og surjektiv

= bijektiv

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_2 \to R_2 + 4R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

ikke $\sim I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \to R_2 + 4R_1 \quad \sim \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_1 \to R_1 - R_2 \quad \sim \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \to \frac{1}{2} R_2 \quad \sim \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0{,}5 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$