Determinanter for $n \times n$-matricer

Determinant for 2×2-matricer

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := ad - bc. \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

Hvis $ad - bc \neq 0$ så er den inverse af $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ givet ved

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ab - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Omvendt, hvis $ad - bc = 0$, så er

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

og hvis A var invertibel, kunne vi skrive

$$C = CI_2 = C(AA^{-1}) = (CA)A^{-1} = 0A^{-1} = 0, \qquad \Rightarrow a = b = c = d = 0$$

Sætning for 2×2 matricer

$ad - bc \neq 0$ hvis og kun hvis $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er invertibel

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a\cancel{b}_{d} - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = B$$

$ad - bc \neq 0$

<u>AB:</u>

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

$$AB = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eksempel

Determinant af rotationsmatrix, invers af rotationsmatrix

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ A_\theta = & \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cc} c & d \end{array} \end{array}$$

$$\left(A_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta)\ldots \\ \sin(-\theta)\ldots \end{bmatrix}\right.$$

$$\mathrm{Det}(A_\theta) = \cos\theta\cdot\cos\theta - \sin\theta\cdot(-\sin\theta)$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$A_\theta^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

Undermatrix, kofaktor

Lad $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$ matrix.
Undermatricen A_{ij} er den $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fremkommer ved at slette række nr. i og søjle nr. j fra A.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{ij}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kofaktoren C_{ij} er givet ved: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots \\ S_{21} & \cdots & \\ S_{n1} & \cdots & \end{bmatrix}$$

$$S_{ij} = (-1)^{i+j}$$

$$\begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & \\ +1 & -1 & +1 & \end{bmatrix}$$

Determinanter for $n \times n$-matricer

Med kofaktoren C_{ij} givet ved $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Definition af determinant

Vi har

$$\det A := a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}.$$

Sætning: Udvikling after række nr. i

Vi har

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}.$$

Sætning: Udvikling after søjle nr. j

Vi har

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

Eksempler

3×3-matricer

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \det \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \det \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

Triangulære $n \times n$-matricer (nedre)

$$\det \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & u_{22} & 0 & 0 \\ * & \cdots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & u_{nn} \end{bmatrix} = u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}.$$

$$\ldots) \det \begin{bmatrix} u_{n-1,n-1} & 0 \\ * & u_{nn} \end{bmatrix} = u_{n-1} u_{n-1} - \cancel{* 0}$$

Determinanter og rækkeoperationer

Følgende gælder for en $n \times n$ matrix A (med rækkerne $\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_n$)

- Fremkommer matricen B ved at addere k gange række i fra A til række j $(i \neq j)$, da gælder: $\det B = \det A$.

$$A = \begin{bmatrix} - - \vec{r}_i - - \\ \vdots \\ - - \vec{r}_j - - \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} - - \vec{r}_i - - \\ \vdots \\ - - \vec{r}_j + k\vec{r}_i - - \end{bmatrix}$$

- Fremkommer matricen B ved at ombytte række i og j fra A $(i \neq j)$, da gælder: $\det B = -\det A$.

$$A = \begin{bmatrix} - - \vec{r}_i - - \\ \vdots \\ - - \vec{r}_j - - \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} - - \vec{r}_j - - \\ \vdots \\ - - \vec{r}_i - - \end{bmatrix}$$

- Fremkommer matricen B ved at gange række i fra A med k, da gælder: $\det B = k \det A$.

$$A = \begin{bmatrix} - - \vec{r}_i - - \\ \vdots \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} - - k\vec{r}_i - - \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Regneregler

Sætning

En kvadratisk matrix A er invertibel hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.

Sætning

Lad A og B være $n \times n$-matricer. Da gælder

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Eksempler:

For A invertibel har vi:

$$AA^{-1} = I_n \Rightarrow 1 = \det(A)\det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

For en kvadratisk matrix A:

$$\det(A^k) = \det(AA^{k-1}) = \det(A)\det(A^{k-1}) = \cdots = \det(A)^k.$$

Kombination af regneregler:

$$\det(A^7(B^T)^{-3}) = \det(A)^7\det((B^T)^{-1})^3 = \det(A)^7\det(B)^{-3}.$$

$A = E_n \cdots E_1 B$

B øvre-triang

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & * & * \\ 0 & b_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

$\det A = \det(E_n) \times \det(E_{n-1}) \cdots \det(E_1) \times \det B$