Vektorrum

$\mathbb{R}^n$ er et eksempel på et *vektorrum*.

Vektorrum

En mængde V er et *reelt vektorrum*, hvis følgende to betingelser er opfyldt:

i) for alle par $\vec{x}$, $\vec{y}$ af elementer fra V gælder

$$\vec{x} + \vec{y} \in V$$

Man siger, at V er *lukket under vektor addition*.

ii) for alle elementer $\vec{x}$ i V og alle tal (skalarer) s gælder

$$s\vec{x} \in V$$

Man siger at V er *lukket under skalar multiplikation*

Underrum af $\mathbb{R}^n$

Definition 1: Underrum af $\mathbb{R}^n$

Et underrum W af $\mathbb{R}^n$ er en delmængde $W \subseteq \mathbb{R}^n$, der opfylder:

- $\mathbf{0} \in W$
- $\vec{u}, \vec{v} \in W \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W$
- $\vec{u} \in W \Rightarrow r\vec{u} \in W$ for enhver skalar r.

Eksempler

- Lad $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \in \mathbb{R}^n$. Så er

$$W = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$$

  et underrum af $\mathbb{R}^n$.
- Lad A være en $m \times n$-matrix. Så er

$$K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \mathbf{0}\}$$

  et underrum af $\mathbb{R}^n$.

$$W = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) \quad , \quad \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^4$$

$$W = \{ s\bar{v}_1 + t\bar{v}_2 + q\bar{v}_3 \mid s, t, q \in \mathbb{R} \}$$

$$\vec{w} \in W \ , \Rightarrow \ \vec{w} = s_1\vec{v}_1 + t_1 \vec{v}_2 + q_1 \vec{v}_3$$

$$\vec{u} \in W \ , \Rightarrow \ \vec{u} = s_2\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + q_2 \vec{v}_3$$

i)
$$\vec{w} + \vec{u} = (s_1 + s_2)\vec{v}_1 + (t_1 + t_2)\vec{v}_2 + (q_1 + q_2)\vec{v}_3$$

$$\vec{w} \in W$$

ii) $p\vec{w}$, $p \in \mathbb{R}$ $\quad p\vec{w} = p(s_1\bar{v}_1 + t_1\bar{v}_2 + q_1\bar{v}_3)$

$$= ps_1\bar{v}_1 + pt_1\bar{v}_2 + pq_1\bar{v}_3 \in W$$

Søjle- og nulrummet

Definition 2

Lad $A = [\vec{a}_1 \; \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n]$ være en $m \times n$-matrix.

- **Søjlerummet** for A er det underrum $\mathrm{Col}(A)$ af $\mathbb{R}^m$, der udspændes af A's søjlevektorer. Dvs.

  $$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}.$$

  [Bemærk: søjlerummet er intet andet end billedrummet for afbildningen $\vec{x} \to A\vec{x} = T_A(\vec{x})$.]
- **Nulrummet** for A er det underrum af $\mathbb{R}^n$, der er givet ved

  $$\mathrm{Null}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \mathbf{0}\}.$$

Definition 3: Basis

En **basis** for et underrum W af $\mathbb{R}^n$, er en mængde af *lineært uafhængige* vektorer $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}$ fra H, der *udspænder* W. Dvs.

$$W = \mathrm{span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}.$$

$A = [\bar{a}_1\, \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n]$, $m \times n$ matrix,

$A\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n \in \operatorname{span}(\bar{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$$

---

std. basis for $\mathbb{R}^n$: $\left\{ \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \, \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \ldots, \bar{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \, \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{e}_1 \bar{e}_2 \cdots \bar{e}_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Find udspændende mængde

Find en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$, der udspænder

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1s \\ 4s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad s \text{ er en skalar} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1s \\ 4s \end{bmatrix} \in \left\{ \tilde{s} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \;\middle|\; \tilde{s} \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

Er vektor i nulrummet?

Tilhører $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ nulrummet for $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$?

$\mathrm{Null}(A) =$ løsninger til $A\vec{x} = \vec{0}$

indsætter:

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

svar: Ja!

Mere om baser

Reduktion til basis

Lad $S = \{\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k\}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$, og lad $V = \text{span}(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k)$. Så kan S reduceres til en basis for V ved at fjerne et antal (måske ingen) vektorer fra S.

Udvidelse til basis

Lad $S = \{\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k\}$ være *lineært uafhængige* vektorer i et underrum V af $\mathbb{R}^n$. Så kan S udvides til en basis for V ved at tilføje et endelig antal vektorer (måske ingen) fra V til S.

Et ikke-nul underrum har altid en basis

Lad V være et ikke-nul underrum af $\mathbb{R}^n$ (dvs. $V \neq \{\mathbf{0}\}$). Så har V en basis: Tag $S = \{\vec{v}\}$, hvor $\vec{v} \in V, \vec{v} \neq \mathbf{0}$, og udvid S til en basis for V.

$S = \{\bar{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^m$

"delmængde af"

$V = \text{span}(S)$

$A = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_k \end{bmatrix}$ ($m \times k$-matrix)

$\rightsquigarrow \ldots R$ ← reduceret trappeform !

søjlerne i A der svarer til søjler med pivot i R

"overlever" $\tilde{S} = \{\bar{v}_1, \cancel{\bar{v}_2}, \ldots, \cancel{\bar{v}_k}\} \overset{ex}{=} \{\bar{v}_1, \bar{v}_3, \vec{v}_7\}$

så gælder $\mathrm{span}(S) = \mathrm{span}(\tilde{S})$ og

$\tilde{S}$ er lineært uafh.

$\Rightarrow$ $\tilde{S}$ basis V.

Dimension og rang

Definition 5: Dimension af underrum

Dimensionen af et underrum H af $\mathbb{R}^n$ er antallet af vektorer i en vilkårlig basis for H. Dimensionen af H benævnes $\dim(H)$. Pr. definition er $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.

Definition 6: Rang af en matrix

Rangen af en $m \times n$-matrix A er defineret som

$$\operatorname{rank}(A) := \dim(\operatorname{Col}(A)) = \#\text{pivot søjler i } A.$$

Sætning om matricers rang

Lad A være en $m \times n$-matrix. Da gælder,

$$\operatorname{rank}(A) + \dim(\operatorname{Null}(A)) = n.$$

Ligger vektor i søjlerummet?

Ligger $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ i søjlerummet for $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$?

søjlerummet: $\{ A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \}$

findes der en løsn. $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ til $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$?

$\Updownarrow$

har totalmatricen $\left[A \,\middle|\, \begin{matrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{matrix} \right]$ pivot i sidste søjle hvis ja: $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ ikke i $\mathrm{Col}(A)$

hvis nej: $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}(A)$

Udspændende mængde for nulrummet

Find en mængde af vektorer, der udspænder nulrummet for
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

finde $\{\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_k\}$ så $\mathrm{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = \mathrm{Null}(A)$

$= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$

totalmatrix for $A\vec{x} = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$R_2 \to R_2 + R_1$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

Matlab

"rref(A)"

$R_2 = -R_2$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$R_1 \to 2R_2 + R_1$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right] = T \quad \left(\begin{array}{l} \text{pivot} \\ \text{søyle 3} \\ x_3 \text{ fri} \end{array} \right.$$

T er totalmatrix for

$$x_1 = 7x_3 = 7s$$
$$x_2 = 5x_3 = 5s \quad , s \in \mathbb{R}$$
$$x_3 = \quad\quad = 1 \cdot s$$

løsninger til $T\vec{x} = 0$

$= $ løsninger til $A\vec{x} = \vec{0}$ $= s \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$

$$\text{null}(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Udspændende mængde, basis for søjlrerummet

Find en mængde af vektorer, der udspænder søjlerummet for $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. Find en *basis* for søjlerummet for A.

$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ udspænder $\mathrm{Col}(A)$

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\left(\underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}}_{\text{lin. uafh}} \right)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{span}\left(\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \right)$$

pivot

Basis for billedrummet af lineær transformation

Find en mængde af vektorer, der udspænder billedrummet for

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}.$$

$T \rightarrow$ kig på std. matricen $[T(\bar{e}_1)\, T(\bar{e}_2)\, T(\bar{e}_3)]$

Billedrum $\Leftrightarrow$ Søjlerum af $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$!