Forelæsning 14

Hvis $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ er en lineær transformation fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$, og $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ er en basis for $\mathbb{R}^2$, så har både $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ og $T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ en representation i $\mathcal{B}$-basen:

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} \quad \text{og} \quad [T(\vec{v})]_{\mathcal{B}}$$

altså:

med $B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{bmatrix}$ (2x2 matrix)

er $$B[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{og}$$
$$B[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Vi kan finde $[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}}$ direkte ved

$$[T]_{\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\vec{v})]_{\mathcal{B}}, \quad \text{hvor}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} & [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{v}) = B[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}}$$
$$\Updownarrow$$
$$B^{-1}T(\vec{v}) = [T(\vec{v})]_{\mathcal{B}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Generelt for } \vec{w} \in \mathbb{R}^2: \\ \underbrace{[\vec{b}_1, \vec{b}_2]}_{B}[\vec{w}]_{\mathcal{B}} = \vec{w} \\ [\vec{w}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\vec{w} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} B^{-1}T(\vec{v}) &= B^{-1}(A\vec{v}) \\ &= B^{-1}(A(I_2\vec{v})) \\ &= B^{-1}(A(B\underbrace{B^{-1}\vec{v}}_{[\vec{v}]_{\mathcal{B}}})) \end{aligned}$$

$$\boxed{[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = (\underbrace{B^{-1}AB}_{})[v]_{\mathcal{B}}}$$

kaldes $[T]_{\mathcal{B}}$ "matrix representationen af T mht. $\mathcal{B}$."

$$\begin{aligned}
B^{-1}AB &= B^{-1}(A[\bar{b}_1\ \bar{b}_2]) \\
&= B^{-1}[A\bar{b}_1\quad A\bar{b}_2] \\
&= B^{-1}[T(\vec{b}_1)\ T(\bar{b}_2)] \\
&= [B^{-1}T(\vec{b}_1)\quad B^{-1}T(\bar{b}_2)]
\end{aligned}$$

$$\boxed{[T]_{\mathcal{B}} = [[T(\bar{b}_1)]_{\mathcal{B}}\ \ [T(\bar{b}_2)]_{\mathcal{B}}]}$$

Forberedelse til MP 3

Sneak-preview på emnerne fra kap 5:

- Egenværdier
- Egenvektorer
- Diagonalisering.
- Egenrum

Definition:

Lad A være en nxn matrix. En ikke-nul vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ kaldes en egenvektor for A, hvis

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

hvor λ er en skalar, λ kaldes en egenværdi for A med egenvektor $\vec{v}$

ex

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

egenværdi

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+3 \\ -3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \vec{v}$$

ex $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

egenværdi

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 \\ 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bemærk: $A(s\vec{v}) = s(A\vec{v}) = s \cdot 5\vec{v} = 5(s\vec{v})$

Hvordan finder man egenværdier?

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \iff (A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0} \qquad (\lambda\vec{v} = \lambda I_n\vec{v})$$

så $\vec{v}$ skal løse systemet $B\vec{v} = \vec{0}$ og være forskellig fra nul.

$[B|0] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0\dots & 0 & 0 \end{array}\right]$ ÷ pivot

$\Rightarrow$ fri var.
$\Rightarrow$ løsn. $\neq \vec{0}$

dvs. B må ikke være inverterbar
(vi skal have mindst én fri variabel)

$\Rightarrow \det B = 0 = \det(A - \lambda I_n)$ ← bruger til at bestemme λ

Karakteristisk polynomial

ex $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 \cdot 1$$

$$= \lambda^2 + (-4-2)\lambda + 8 - 3$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

(andengradspol i λ!)

Vi skal altså løse: $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$

$\sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{D}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$\lambda = 5$ eller $\lambda = 1$!

Hvordan finder vi eigenvektorer:

$\vec{v}_i$ skal løse $[A - \lambda_i I_n]\vec{v}_i = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$

→ indsætter de kendte λ_i efter tur og løser for $\vec{v}_i$

ex $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$

$\lambda_1 = 1$:

$$\left(A - 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\vec{v}_1 = 0$$

$$\Updownarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=\vec{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

totalmatrix: $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$R_2 \sim R_2 - R_1$ $\sim$ $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$R_1 \sim \frac{1}{3}R_1$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = T$

$\uparrow$ p

T er totalmatrix for $1 \cdot x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 0$, x_2 fri

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_2 = -\frac{1}{3}s \\ x_2 = \quad\quad\quad = s \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{eigenvektor}}$$

eigenvektor, men alle multiplum af $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ er også eigenvektor, så vi ganger med 3 og får

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 5$:

$$\left[A - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{totalmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R_2 \sim R_2 + 3R_1} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \underset{\sim}{R_1 \sim -R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = T$$

P

T totalmatrix for $x_1 - x_2 = 0$, x_2 fri

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 = s \\ x_2 = \quad\;\; = s \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; s \in \mathbb{R}$$

Alle valg af s giver en egenvektor med egenværdien 5. Vi vælger $s=1$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenrum:

For eksemplerne ovenfor, er alle $\vec{v} \in \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ en egenvektor med egenværdi 5. $\text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ kaldes egenrummet hørende til egenværdien 5.

- Det kunne være sket, at det karakteristiske polynomium havde f.eks. en dobbeltrod, så kan egenrummet være flerdim.

ex $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\det(A - \lambda I_2) = (5-\lambda)(5-\lambda) = (5-\lambda)^2$

her er $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ to lineært uafh. egenvektorer med egenværdi 5, og alle vektorer i $\text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$ er egenvektorer i egenrummet hørende til $\lambda = 5$.

Diagonalisering:

Vi beslutter en nummerering af egenværdierne

ex $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$

og bygger en matrix P med egenvektorerne som søjler i samme rækkefølge

ex $P = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Så bemærker vi, at for $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ og basis $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

så gælder

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{v}_1)]_{\mathcal{B}}\ [T(\vec{v}_2)]_{\mathcal{B}} \right]$$
$$= P^{-1} A P$$

$$T(\vec{v}_1) = A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 \quad = \lambda_1\vec{v}_1 + 0\cdot\vec{v}_2 \quad \Rightarrow [T(\vec{v}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{v}_2) = A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 \quad \Rightarrow [T(\vec{v}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$
$$= 0\cdot\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$$

så:

$$\boxed{\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} &= P^{-1} A P \\ P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^{-1} &= A \end{aligned}}$$

, eller (gang m. P fra højre, P^{-1} fra venstre)

kaldes "at diagonalisere A" ($D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ er "diagonal")

og A kaldes "diagonalisérbar".

- Der findes matricer, der ikke kan diagonaliseres.

et eksempel $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 1$ dobbeltrod, men kun $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ egenvektor!

$(1-\lambda)^2 = 0$

(geometrisk multiplicitet vs. algebraisk multiplicitet).

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & \underset{\uparrow P}{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$\Updownarrow$ x_1 fri

$x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}. \qquad P = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Det. af 3x3 matrix $A - \lambda I_3$

$$\left|\begin{bmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \boxed{a_{13}}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{bmatrix}\right|$$

$$= (-1)^2(a_{11}-\lambda)\begin{vmatrix}a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix} + (-1)^3 a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^4 a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}-\lambda\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$