Egenværdier og egenvektorer

Definition

Lad A være en $n \times n$ matrix. En vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, kaldes en **egenvektor** for A, hvis der findes en skalar λ således

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad (*).$$

Skalaren λ kaldes en tilhørende **egenværdi**. Egenvektorer og egenværdier defineres helt analogt for en lineær operator.

Matrixligningen $(*)$ har en ikke-triviel løsning netop når

$$A - \lambda I_n$$

er ikke-invertibel. Egenværdierne for A kan derfor findes ved at løse den:

Karakteristiske ligning

$$(K) \qquad \det(A - tI_n) = 0,$$

hvor venstresiden kan vises at v?re et polynomium af grad n (polynomium i t).

Egenrum

Givet en egenværdi λ for matricen A, så finder man de tilhørende egenvektorer ved at løse den homogene matrixligning

$$(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}.$$

Egenrum for λ: Definition

Lad λ være en egenværdi for $n \times n$-matricen A. Underrummet

$$\mathrm{Null}(A - \lambda I_n) \subseteq \mathbb{R}^n$$

kaldes **egenrummet** hørende til egenværdien λ. Egenrummet består af samtlige egenvektorer hørende til egenværdien λ, samt vektoren $\vec{0}$.

Bemærk: vi ved kun, at $\dim(\mathrm{Null}(A - \lambda I_n)) \geq 1$. Dimensionen kan meget vel være > 1. Normalt finder man en **basis af egenvektorer** for egenrummet $\mathrm{Null}(A - \lambda I_n)$ hørende til egenværdien λ.

Mere om egenrummet

Sætning

Lad A være en $n \times n$-matrix med egenværdi λ. Så gælder

$$1 \leq \dim \mathrm{Null}(A - \lambda I_n) \leq m_\lambda,$$

hvor m_λ er multipliciteten af λ som rod i den karakteristiske ligning [dvs. $(t-\lambda)^{m_\lambda}$ indgår som "optimal" faktor i den karakteristiske ligning].

Procedure: Givet en $n \times n$ matrix A

- Find A's egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ved at løse (finde rødder i) den karakteristiske ligning

$$\det(A - tI_n) = 0.$$

- For hver egenværdi λ_i, find en basis af egenvektorer for egenrummet

$$\mathrm{Null}(A - \lambda_i I_n).$$

$$p(t) = \underline{(1-t)(2-t)(1-t)} = (1+t^2-2t)(2-t)$$

$$= -t^3 + (2+2)t^2 + (-4-1)t + 2$$

$$= \underline{-t^3 + 4t^2 - 5t + 2}$$

$$p(t) = (1-t)^2(2-t)$$

1 har (algebraisk) multiplicitet 2

2 — 1 — 1

$$at^2+bt+c = a(\lambda_1-t)(\lambda_2-t) \overset{\text{hvis } \lambda_1=\lambda_2}{=} a(\lambda-t)^2$$

Eksempel I

Find egenværdierne og de tilhørende egenvektorer for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

egenværdier:

karakteristiske polynomium $= \det(A - \lambda I_2)$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 2 \cdot 2$$

$$= \lambda^2 + (-1+2)\lambda - 4 - 2$$

$$\det(A - \lambda I_2) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \qquad D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{D}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

egenverdier: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$

egenvektor for $\lambda_1 = 2$:

løse $(A - 2I_2)\vec{v} = \vec{0}$ $= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \bar{v} = \bar{0}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\vec{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

totalmatrix $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right]$

$$R_2 \sim R_2 + 2R_1 \quad \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 \sim -R_1}{\sim} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \uparrow p & & \end{array} \end{array}$$

aflæse: x_2 fri, $x_1 - 2x_2 = 0 \iff$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

vælger $s = 1 \Rightarrow$ egenvektor $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, med $\lambda_1 = 2$

$\underline{\lambda_2 = -3}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $\quad A - (-3)I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

t. matrix $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2 \sim R_2 - \frac{1}{2}R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\overset{R_1 \sim \frac{R_1}{2}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ aflæse: x_2 fri, $2x_1 = -x_2$

kald $x_2 = s$: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

vælg $s = 2$, egenvektor $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, m. $\lambda_2 = -3$

Eksempler

Eksempel II

Egenværdierne for en øvre (eller nedre) trekantmatrix $U = [u_{ij}]$ er netop diagonal elementerne $u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}$. Følger fra:

$$\det(U - tI_n) = \det \begin{bmatrix} u_{11} - t & * & * & * \\ 0 & u_{22} - t & * & * \\ 0 & \cdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} - t \end{bmatrix}$$

$$= (u_{11} - t)(u_{22} - t) \cdots (u_{nn} - t).$$

ex: $\begin{bmatrix} -17 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvrd. $-17, 3, \underline{0}, 1$

Egenværdier for similære matricer

To matricer A og B kaldes similære, hvis der findes en inverterbar matrix P således at $B = P^{-1}AP$.

Similære matricer har samme egenværdier

Hvis A og B er kvadratiske, og der findes en inverterbar P således, at $B = P^{-1}AP$, så er har A og B de samme egenværdier.

Dette vises ved at indse, at A og B har samme karakteristike polynomier:

$P^{-1}P = I_n$

$$\overbrace{\det(B - tI_n)}^{\text{k. pol. for } B} = \det(\overbrace{P^{-1}AP}^{B} - tP^{-1}I_nP)$$

$$= \det(P^{-1}(A - tI_n)P) = \det(P^{-1})\det(A - tI_n)\det(P)$$

$$= \left(\frac{1}{\cancel{\det(P)}}\right)\det(A - tI_n)\cancel{\det(P)} = \underline{\det(A - tI_n)}. = \text{k. pol. for } A$$