Øvre triangulær matrix

Egenværdier på diagonal

Egenværdierne for en øvre (eller nedre) trekantmatrix $U = [u_{ij}]$ er netop diagonal elementerne $u_{11}, u_{22}, \ldots, u_{nn}$. Følger fra:

$$\det(U - tI_n) = \det \begin{bmatrix} u_{11} - t & * & * & * \\ 0 & u_{22} - t & * & * \\ 0 & \cdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} - t \end{bmatrix}$$
$$= (u_{11} - t)(u_{22} - t) \cdots (u_{nn} - t).$$

Diagonalisering

Definition (diagonaliserbar)

- Lad A være en $n \times n$-matrix. A siges at være diagonaliserbar hvis A er similær med en diagonal matrix, dvs.

$$A = PDP^{-1},$$

hvor D er en $n \times n$ diagonal matrix og P er en $n \times n$ inverterbar matrix.

- En lineær operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ siges at være diagonaliserbar, hvis T's standardmatrix er diagonaliserbar.

$$\underbrace{P^{-1}P}D$$
$$= I_n D$$
$$= D$$

Fortolkning

- Betragt en $n \times n$-matrix A som er diagonaliserbar, dvs. $A = PDP^{-1}$. Benævn P's søjler $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.
- Bemærk, at $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ udgør en basis for $\mathbb{R}^n$ (da P er invertibel).
- Vi ser nu på den lineære operator T induceret af A, dvs. $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Hvad er T's matrix repræsentation relativ til $\mathcal{B}$ Jvf. Kapitel 4, er den præcis

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = P^{-1}(PDP^{-1})P = D.$$

eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{(-1)\cdot 1 - 3\cdot 1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}$$

PD:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = PD$$

$(PD)P^{-1}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{4}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} \frac{1}{4} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = A$$

Diagonalisering II

Sætning

Lad A være en $n \times n$-matrix. A er diagonaliserbar hvis og kun hvis A har n lineært uafhængige egenvektorer.

I fald A har n lineært uafhængige egenvektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ med tilhørende egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, kan vi skrive

$$A = PDP^{-1},$$

hvor $P = [\vec{v}_1 \; \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n]$ og $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Sætning (n forskellige egenværdier)

Lad A være en $n \times n$-matrix. Hvis A har n *forskellige* egenværdier, da har A netop n lineært uafhængige egenvektorer og A kan derfor diagonaliseres.

Mere generelt:

Sætning

Lad A være en $n \times n$-matrix med de forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ($r < n$ er tilladt).

- Matricen A er diagonaliserbar hvis og kun hvis summen af dimensionerne of egenrummene hørende til $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ er præcis n.
- Hvis A er diagonaliserbar, og $\mathcal{B}_k$ er en basis af egenvektorer for egenrummet hørende til λ_k, da udgør

  $$\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_r\}$$

  en basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for A.

eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{karakteristisk polynomium: } -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

$\lambda = -1$

$$A - (-1)I_3 = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -2x_3 = -2 \cdot s \\ x_2 &= 1 \cdot x_3 = 1 \cdot s \\ x_3 &= = 1 \cdot s \end{aligned}\right\} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 2$:

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -x_2 = -s = s \cdot (-1) + t \cdot 0 \\ x_2 &= = s = s \cdot 1 + t \cdot 0 \\ x_3 &= = t = s \cdot 0 + t \cdot 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + t \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$\underline{\lambda = -1}: \quad \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\lambda = 2}: \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right.$$

$$P = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \cancel{D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$A = PDP^{-1}$$

ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 1, \quad \text{karak. polynomium}$$

$$= (1-\lambda)^3$$

$$\left| A - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\cdot(-1)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^3 \left| \cdots \right| + 0\cdot(-1)^4 \left| \cdots \right|$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(1-\lambda) - 0\cdot 1\right] = (1-\lambda)^3$$

1 egenvrd. med mult 3

egenrum mht egenvd. 1 :

$$\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\vec{v} = \vec{0} \iff \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\vec{v} = \vec{0}$$

totalmatrix $\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\\ \begin{array}{cccc}x_1 & x_2 & \uparrow & \\ \text{fri} & & P & \end{array}\end{array}$

$$\left.\begin{array}{l}x_3 = 0\\ x_2 = t\\ x_1 = s\end{array}\right\} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot s + 0t\\ 0\cdot s + 1\cdot t\\ 0\cdot s + 0\cdot t\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ er basis for egenrummet,

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Null}(A - 1\cdot I_3)) = 2$!

Egenvektorer for distinkte egenværdier

Egenvektorer for distinkte egenværdier

Hvis $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ er distinkte egenværdier for en matrix A med tilhørende egenvektorer $\vec{v}_j$, dvs.

$$A\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j, \quad j = 1, \dots, n \quad \text{og} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j.$$

så er $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n\}$ lineært uafhængig.

Bevis: Antag for modstrid, at $S = \{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n\}$ er lineært afhængig. Vi kan udtynde S til en lineært uafhængig mængde, kald antallet af lineært uafhængige vektorer for k. Vi ombytter rækkefølgen af egenvektorerne $\vec{v}_j, j = 1, \dots, n$ således at disse k lineært vektorer er givet ved $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$.

I dette setup må $\vec{v}_{k+1}$ således ligge i span($\mathcal{B}$), så vi kan skrive

$$\vec{v}_{k+1} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_k\vec{v}_k \tag{1}$$

for nogle konstanter c_j der ikke alle er lig nul (da $\vec{v}_{k+1}$ er en ikke-nul vektor - det er et af kravene for at være en egenvektor). Anvend A på $\vec{v}_{k+1}$:

$$\begin{aligned} A\vec{v}_{k+1} = \lambda_{k+1}\vec{v}_{k+1} &= Ac_1\vec{v}_1 + Ac_2\vec{v}_2 + \ldots + Ac_k\vec{v}_k \\ &= c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\lambda_k\vec{v}_k \end{aligned}$$

hvis vi så ganger $\vec{v}_{k+1}$ med λ_{k+1} og trækker fra $A\vec{v}_{k+1}$ så har vi

$$\begin{aligned} \vec{0} &= A\vec{v}_{k+1} - \lambda_{k+1}\vec{v}_{k+1} \\ &= c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\vec{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\vec{v}_2 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\vec{v}_k \end{aligned}$$

da B er lin. uafh. må der derfor gælde, at

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = \cdots = c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$$

og da $\lambda_i \neq \lambda_j, j \neq i$ så må der gælde at alle c_j er nul for $j = 1, \ldots, k$, men dette er i modstrid med at $\vec{v}_{k+1} \neq \vec{0}$.