Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Tirsdag den 4. januar, 2011. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 8 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLD NUMMER:
- ☐ Hold 2 (v. Jacob Broe)
- ☐ Hold 3 (v. Olav Geil)
- ☐ Hold 4 (v. Morten Nielsen)
- ☐ Hold 5 (v. Bo Rosbjerg)
- ☐ Hold 6 (v. Nikolaj Hess-Nielsen)

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (6%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Find A^{-1}.

Opgave 2 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Bring A på trappeform (række-echelonform).
2. Bestem determinanten af A.
3. Bestem determinanten af $\left(A^3\right)^T$.

Opgave 3 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Find en basis for søjlerummet hørende til A.
2. Find en basis for nulrummet hørende til A.
3. Bestem rank A og nullity A.

Opgave 4 (10%).

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for underrummet $W \subseteq \mathbb{R}^4$.

1. Find ved hjælp af Gram-Schmidt processen en ortogonal basis for W.
2. Bestem herefter en ortonormal basis for W.

Opgave 5 (8%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Find egenværdierne for A.
2. Find en basis for hvert af de tilhørende egenrum.
3. Afgør om A er diagonaliserbar (husk at argumentere for dit svar).

Opgave 6 (8%).

Lad

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Vis, at $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for W.
2. Argumenter for, at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ ligger i W.
3. Lad $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bestem $\mathbf{u}$.

Opgave 7 (8%).

Det oplyses, at

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

kan skrives $A = PDP^{-1}$, hvor

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Find den partikulære løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= 6y_1 + 6y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - y_2 \end{aligned}$$

som opfylder bibetingelsen

$$\begin{cases} y_1(0) &= -7 \\ y_2(0) &= 4. \end{cases}$$

Opgave 8 (10%).

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ er givet ved

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem standardmatricen hørende til T.
2. Find $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$.
3. Er T surjektiv? (Alternativt dansk udtryk er “på”. Engelske udtryk er “surjective” eller “onto”).
4. Er T injektiv? (Alternativt dansk udtryk er “en-til-en”. Engelske udtryk er “injective” eller “one-to-one”).

Del II (”multiple choice” opgaver)

Opgave 9 (4%).

Der er givet tre vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^7$, som er lineært *uafhængige*. Sæt

$$H = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}\}.$$

Afkryds det sande udsagn nedenfor.

☐ Dimensionen af H er 7.
☐ Dimensionen af H er 3.
☐ H kan beskrives som en linie i $\mathbf{R}^7$.

Opgave 10 (10%).

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -15 & 7 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & -34 & 50 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -60 & -140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 910 \end{bmatrix}.$$

Afkryds *samtlige* sande udsagn nedenfor (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning).

☐ A er inverterbar (regulær).
☐ Den lineære transformation induceret af A er injektiv (engelsk: one-to-one).
☐ A er på række-echelonform (trappeform).
☐ nullity $A = 1$.
☐ rank $A = 5$.
☐ nullity A + rank $A = 6$.
☐ Tallet -15 er egenværdi for A.
☐ A er på reduceret række-echelonform (reduceret trappeform).
☐ Der findes et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^5$, således at ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke er konsistent.
☐ A er en 4×4-matrix.
☐ A er diagonaliserbar.

Opgave 11 (6%).

Der er givet en lineær afbildning $S\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^3$. Besvar følgende to spørgsmål.

Bestem den største værdi af n, for hvilken der med sikkerhed gælder, at S *ikke* er surjektiv (engelsk: onto):

☐ 0	☐ 2	☐ 4	☐ 6	☐ 8	☐ 10
☐ 1	☐ 3	☐ 5	☐ 7	☐ 9	☐ 11

Bestem den største værdi af n, for hvilken der gælder, at S *kan* være være injektiv (engelsk: one-to-one):

☐ 0	☐ 2	☐ 4	☐ 6	☐ 8	☐ 10
☐ 1	☐ 3	☐ 5	☐ 7	☐ 9	☐ 11

Opgave 12 (10%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

a. Enhver symmetrisk 4×4-matrix kan diagonaliseres.

☐ Sand ☐ Falsk

b. Der findes en lineær transformation $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^5$ som er surjektiv (engelsk: onto).

☐ Sand ☐ Falsk

c. Der findes en lineær operator $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, med en ortogonal matrix som standardmatrice, således at $T(\mathbf{e}_1) = 4\mathbf{e}_3$, hvor $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ er standardbasen for $\mathbf{R}^3$ (dvs. søjlerne i I_3).

☐ Sand ☐ Falsk

d. Lad W være et underrum af $\mathbf{R}^5$ med dimension 4. Så udgør enhver ortonormal mængde af 4 vektorer i W en basis for W.

☐ Sand ☐ Falsk

e. En kvadratisk matrix A er inverterbar (regulær), hvis og kun hvis 0 ikke er en egenværdi for A.

☐ Sand ☐ Falsk