Reeksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Onsdag den 16. februar, 2011. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 8 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLD NUMMER:
- ☐ Hold 2 (v. Jacob Broe)
- ☐ Hold 3 (v. Olav Geil)
- ☐ Hold 4 (v. Morten Nielsen)
- ☐ Hold 5 (v. Bo Rosbjerg)
- ☐ Hold 6 (v. Nikolaj Hess-Nielsen)

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Find A^{-1}.
2. Bestem determinanten af A.
3. Bestem determinanten af A^5

Opgave 2 (9%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

1. Løs ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
2. Bestem rank A og nullity A.

Opgave 3 (9%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. Find en basis for søjlerummet hørende til A.
2. Find en basis for nulrummet hørende til A.
3. Find en basis for rækkerummet hørende til A.

Opgave 4 (12%).

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for underrummet $W \subseteq \mathbb{R}^4$.

1. Find ved hjælp af Gram-Schmidt processen en ortogonal basis for W.
2. Bestem herefter en ortonormal basis for W.
3. Lad $[\mathbf{u}]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Bestem $\mathbf{u}$.

Opgave 5 (9%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Find egenværdierne for A.
2. Find en basis for hvert af de tilhørende egenrum.
3. Diagonaliser A. Det vil sige, find matricer P og D, så P er inverterbar, så D er en diagonalmatrix, og så $A = PDP^{-1}$ holder.

Opgave 6 (5%).

Lad

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Vis, at $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ *ikke* er en basis for W.

2. Argumenter for, at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ *ikke* ligger i W.

Opgave 7 (8%).

Det oplyses, at

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

kan skrives $A = PDP^{-1}$, hvor

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Find den partikulære løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= \quad y_2 \\ y_2' &= y_1 \end{aligned}$$

som opfylder bibetingelsen

$$\begin{cases} y_1(0) &= 5 \\ y_2(0) &= 1. \end{cases}$$

Opgave 8 (8%).

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er givet ved

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem standardmatricen hørende til T.
2. Find to vektorer, som ej bliver transformeret over i sig selv.
3. Find tre vektorer, som bliver transformeret over i sig selv.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (4%)

Der er givet tre vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$, således at $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ er lineært *uafhængig* og $\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ er lineært *uafhængig*. Afkryds det sande udsagn nedenfor.

- ☐ $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ er altid lineært uafhængige.
- ☐ $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ er aldrig lineært uafhængige.
- ☐ Med de givne oplysninger kan det *ikke* afgøres om $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ er linært uafhængige.

Opgave 10 (10%).

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Afkryds *samtlige* sande udsagn nedenfor (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning).

- ☐ A er ikke-inverterbar.
- ☐ Den lineære transformation induceret af A er injektiv (engelsk: one-to-one).
- ☐ A er på række-echelonform (trappeform).
- ☐ nullity $A = 1$.
- ☐ rank $A = 3$.
- ☐ nullity A + rank $A = 6$.
- ☐ Tallet 0 er egenværdi for A.
- ☐ A er på reduceret række-echelonform (reduceret trappeform).
- ☐ Der findes et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$, således at ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke er konsistent
- ☐ $\det A = 0$.

Opgave 11 (8%)

Der er givet to 3×3-matricer A og B. Det oplyses, at $\det A = -2$ samt at B er en ortogonal matrix med positiv determinant. Besvar nedenstående spørgsmål baseret på disse oplysninger:

a. Bestem værdien af: $\det B$

☐ 0 ☐ -2 ☐ 1 ☐ 2

b. Bestem værdien af: $\det(AB)$

☐ -2 ☐ 2 ☐ 1 ☐ 0

c. Bestem værdien af: $\det(-A)$

☐ 1 ☐ -2 ☐ 1/2 ☐ 2

Opgave 12 (8%).

Besvar følgende 4 sand/falsk opgaver:

a. Lad W være et underrum af $\mathbf{R}^6$ med dimension 4. Så er dimensionen af $W^\perp$ præcis 2.

☐ Sand ☐ Falsk

b. Der findes en lineær transformation $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ som er injektiv (engelsk: one-to-one).

☐ Sand ☐ Falsk

c. Hvis Q er en 4×4 ortogonal matrix, da er Q^3 ligeledes en ortogonal matrix.

☐ Sand ☐ Falsk

d. En 3×3 matrix A med egenværdierne $1, -1$ og 2 er *både* inverterbar og diagonaliserbar.

☐ Sand ☐ Falsk