Miniprojekt 1

- Partikulær løsning til systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ er et (tilfældigt) $\vec{x}^*$, så $A\vec{x}^* = \vec{b}$.
- Det homogene problem er $A\vec{x} = \vec{0}$. Hvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ udspænder løsningsmængden til det homogene problem, dvs $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ er lineært uafhængig, og

$$A(\vec{x}) = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{x} = s\vec{u} + t\vec{v}, \text{ for nogle } s, t \in \mathbb{R}$$

- Så er den fuldtændige løsning til $A\vec{x} = \vec{b}$ givet ved:

$$\vec{x}^* + s\vec{u} + t\vec{v}; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

  Bemærk $A(\vec{x}^* + s\vec{u} + t\vec{v}) = A(\vec{x}^*) + A(s\vec{u} + t\vec{v}) = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$.
- Man skal altså bare bruge en eneste løsning til $A\vec{x} = \vec{b}$, derefter kigger man på det homogene problem $A\vec{x} = \vec{0}$ for at generere alle løsninger.

Lineær (u)afhængighed

Vektorerne $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ i $\mathbb{R}^m$ siges at være *lineært uafhængige* hvis

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_k\vec{v}_k = \vec{0},$$

kun har løsningen $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$.

På matrixform

Lad $A = [\vec{v}_1\,\vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n]$ være en $m \times n$-matrix. A's søjler er lineært uafhængige præcis når ligningssystemet

$$A\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

ingen fri variable har. Dvs når $A = [\vec{v}_1\,\vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n]$ har pivot-søjle i hver søjle (eller tilsvarende når $\operatorname{rank}(A) = n$).

Eksempel

En samling af n vektorer i $\mathbb{R}^m$, med $n > m$, er altid lineært afhængig, da vi har $\operatorname{rank}(A) \leq m < n$, hvor A er som ovenfor.

Eksempel

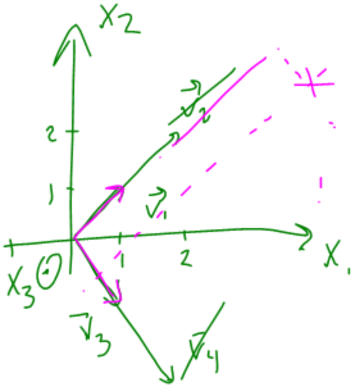
$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Er S lineært uafhængig? Kan S udtyndes til en mindre mængde med samme spænd?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

÷ pivot

S lin. afh!



$$\tilde{S} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \right\}$$

har $\operatorname{span}(S) = \operatorname{span}(\tilde{S})$

og $\tilde{S}$ er lin. uafh.

Lineær afhængighed

$S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ er lineært afhængig.

$$\Updownarrow$$

Der findes (mindst) en ikke-nul løsning $\vec{x}$ til $A\vec{x} = \vec{0}$, hvor $A = [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k]$.

$$\Updownarrow$$

$\text{nullity}(A) \neq 0$.

$$\Updownarrow$$

Antallet af ikke-pivot søjler i A er forskellig fra nul.

Lineær uafhængighed

$S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ er lineært uafhængig.

$$\Updownarrow$$

Der findes kun løsningen $\vec{x} = 0$ til $A\vec{x} = \vec{0}$, hvor $A = [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k]$.

$$\Updownarrow$$

$\mathrm{nullity}(A) = 0$.

$$\Updownarrow$$

Alle søjler i A er privot-søjler.

Eksempel

Bestem, hvis muligt, en værdi for r, så mængden

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ r \end{bmatrix} \right\}$$

er lineært afhængig.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & r \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & r+4 \end{bmatrix} \to$$

hvis $r = -4$
har søjle 2
ingen pivot
$\Downarrow$
S_1 lin afh.

Eksempel

Bestem, hvis muligt, en værdi for r, så mængden

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ r \end{bmatrix} \right\}$$

er lineært afhængig.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & r \end{bmatrix} \overset{R_2 \to R_2 + R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & r+4 \end{bmatrix}$$

↑ har aldrig pivot for noget r.

S_2 altid lin. afh

Lidt opsamling om Lineær uafhængighed

A er $m \times n$ matrix med reduceret trappeform R.

The rank of A	The number of solutions of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	The columns of A	The reduced row echelon form R of A
$\operatorname{rank} A = m$	$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has at least one solution for every $\mathbf{b}$ in $\mathcal{R}^m$.	The columns of A are a generating set for $\mathcal{R}^m$.	Every row of R contains a pivot position.
$\operatorname{rank} A = n$	$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has at most one solution for every $\mathbf{b}$ in $\mathcal{R}^m$.	The columns of A are linearly independent.	Every column of R contains a pivot position.

Figur: Fra (SIF) kap. 1.7

$$\begin{bmatrix} - & r_1 & - \\ & \vdots & \\ & A & \\ & \vdots & \\ - & r_m & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

m pivotsøjler

$$[A|\vec{b}] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & \underset{\neq 0}{b_m} \end{array}\right]$$

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

hvis $\text{rank}(A) = n$ og $A\vec{x} = \vec{b}$

$\Rightarrow$ så er $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ lin. uafh.

$\Rightarrow$ (def. lin. afh) $\tilde{x}_1\vec{a}_1 + \ldots + \tilde{x}_n\vec{a}_n = \vec{b}$

$$\vec{b} - \vec{b} = (\tilde{x}_1 - x_1)\vec{a}_1 + \cdots + (\tilde{x}_n - x_n)\vec{a}_n = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\tilde{x}_1 - x_1) = 0, \; (\tilde{x}_2 - x_2) = 0, \ldots, (\tilde{x}_n - x_n) = 0$$