Nulrum af lineær funktion

Find nulrummet af $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ defineret ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 \end{bmatrix}$$

<u>nulrum:</u>

de vektorer i def.mængden $\mathbb{R}^3$, der opfylder, at

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

For at finde nulrummet, skal vi løse ligningen $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

T har standardmatrix $A = \begin{array}{ccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$
$A = \left[T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) \; T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) \; T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \right]$

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 6 & 8\end{bmatrix}$, skal løse $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

totalmatrix for $A\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 4 & 0\\ 2 & 6 & 8 & 0\end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} R & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\end{array}\right]$$

ingen pivot i søjle 2 og søjle 3 $\Rightarrow$ x_2, x_3 fri variable

$[R\,|\,\vec{0}]$ er totalmatrix for $1\cdot x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$

indfør parametre $x_2 = s$, $x_3 = t$

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - 4x_3 = -3s - 4t \\ x_2 = = 1\cdot s + 0\cdot t \\ x_3 = = 0 s + 1\cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

Løsningsmængden til $A\vec{x} = \vec{0}$ er således $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Nulrummet for T skrives Null(T), $= \text{Null}(T)$.

Matrixprodukt

Definition

Lad A være en $m \times n$-matrix og B være en $n \times p$-matrix givet ved søjlevektorerne $B = [\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \cdots \quad \vec{b}_p]$. Så defineres produktet AB som den $m \times p$-matrix, der er givet ved

$$AB = [A\vec{b}_1 \quad A\vec{b}_2 \quad \cdots \quad A\vec{b}_p].$$

Pr. definition gælder $(AB)\vec{x} = A(B\vec{x})$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$.

hvornår er matrixprodukt veldefineret?

Hvis A er en $m \times n$-matrix, og B er en $p \times k$-matrix, så:

- AB giver kun mening, hvis $n = p$, resultatet, AB er en $m \times k$-matrix.
- BA giver kun mening, hvis $k = m$, resultatet, $B\overset{A}{\cancel{B}}$ er en $p \times n$-matrix.

Matrixprodukt

Indgang (i, j) i AB

A er $m \times n$-matrix, B er $n \times p$-matrix.

$$(AB)_{i,j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \vec{r}_i \cdot \vec{b}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

dvs. indgangen med koordinatet (i, j) i matricen AB, (række i, søjle j) er givet vedprikproduktet mellem rækkevektor $\vec{r}_i$ fra A og søjlevektor $\vec{b}_j$ fra B.

eksempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, find AB

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1,2)\cdot(5,7) & (1,2)\cdot(6,8) \\ (3,4)\cdot(5,7) & (3,4)\cdot(6,8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8 \\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Eksempel

udregn $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

En søjlevektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ er en $m \times 1$-matrix, og kan således ganges på en $p \times m$-matrix fra højre:

[prikprodukt kan skrives $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$]

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pm} \end{bmatrix}}_{p \times m} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{m \times 1} \Rightarrow p \times 1 \text{ matrix}$$

(ok for alle valg af p)

(hvis $p = 1$ har vi det kendte prikprodukt), eller på en $1 \times k$-matrix fra venstre:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \end{bmatrix}$$

(ok for alle valg af k)