$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow A$$

$$A^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = I_2 \quad , \quad AA^T : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_3$$

Invertible matricer

Definition

En $n \times n$ matrix A er **inverterbar** (invertibel), hvis der findes en $n \times n$ matrix C, således

$$CA = I_n \qquad AC = I_n.$$

I givet fald er C entydigt bestemt, og vi skriver $A^{-1} = C$.

man skal check både CA og AC

For

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Da gælder $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, men $AA^T \neq I_n$

Regneregler

Regneregler

Lad A og B være invertible $n \times n$ matricer. Så gælder,

- A^{-1} er invertibel med $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- AB er invertibel med $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- A^T er invertibel med $(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Elementære matricer

Definition

En elementær $n \times n$ matrix E, er en matrix som er fremkommet ved at udføre *netop én* rækkeoperation på I_n.

Eksempler

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elementære matricer II

Faktum:

Multiplikation med en elementær $m \times m$ matrix E fra venstre på en $m \times n$ matrix A, udfører den rækkeoperation som 'dannede' E fra I_m, direkte på A.

Eksempler

$$E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 4a+g & 4b+h & 4c+i \end{bmatrix}$$

$$E_3 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Trappeform og elementære matricer

Reduktion til trappeform

Lad A være en $m \times n$ matrix. Vi kan ved et antal (lad os sige p) elementære rækkeoperationer reducere A til dens reducerede trappeform R. Hver af disse rækkeoperationer kan 'udføres' af en elementær $m \times m$-matrix E_j, $j = 1, 2, \ldots, p$. Dvs. vi har

$$A \sim E_1 A \sim E_2(E_1 A) \sim \cdots \sim E_p(E_{p-1} \cdots E_1 A) = R.$$

Vi kan derfor skrive kort, at

$$R = FA,$$

hvor

$$F = E_p E_{p-1} \cdots E_1.$$

Algoritme til matrix inversion

Undersøge om A er inverterbar og finde A^{-1} samtidigt

Brug elementære rækkeoperationer til at transformere $[A\ I_n]$ til $[R\ B]$ hvor R er på reduceret trappeform.

- Hvis $R = I_n$, så er A invertibel, og $A^{-1} = B$.
- Hvis $R \neq I_n$, så er A ikke invertibel.

Rækkereduktionsalgoritmen til beregning af $A^{-1}B$

Brug elementære rækkeoperationer til at transformere $[A\ \cancel{I_n}\,B]$ til $[I_n\ A^{-1}B]$.

Eksempel

Er $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ inverterbar?

$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

ønske: trappeform

$[A \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$

$\overset{R_1 \to R_1 + 4R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$

$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I_2} \qquad \underbrace{\begin{matrix} -7 & 4 \\ -2 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}$

Eksempel

Er $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ inverterbar?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

R

R er på redusert trappeform, og forskellig fra $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, så A ej inverterbar!

Invertible matricer

Sætning: Ækvivalente betingelser for invertibilitet

Lad A være en $n \times n$ matrix. Så er følgende udsagn ækvivalente:

1. A er en invertibel matrix.
2. $A \sim I_n$.
3. A har n pivot'er.
4. Ligningen $A\vec{x} = \mathbf{0}$ har kun den trivielle løsning.
5. A's søjler er lineært uafhængige.
6. Den lineære transformation $\vec{x} \to A\vec{x}$ er injektiv.
7. Ligningen $A\vec{x} = \mathbf{b}$ har mindst en løsning for ethvert $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
8. A's søjler udspænder $\mathbb{R}^n$.
9. Den lineære transformation $\vec{x} \to A\vec{x}$ afbilder $\mathbb{R}^n$ på $\mathbb{R}^n$.
10. Der findes en $n \times n$-matrix C, således $CA = I_n$.
11. Der findes en $n \times n$-matrix D, således $AD = I_n$.
12. A^T er en invertibel matrix.
13. $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^n$ ($=$ søjlerummet af A $=$ spændet af A's søjler.)
14. $\mathrm{rank}(A) = n$.
15. $\mathrm{Null}(A) = \{\mathbf{0}\}$.