Determinanter for $n \times n$-matricer

Determinant for 2×2-matricer

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := ad - bc. \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

Hvis $ad - bc \neq 0$ så er den inverse af $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ givet ved

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a\underset{d}{\cancel{b}} - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Omvendt, hvis $ad - bc = 0$, så er $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ikke inverterbar

Undermatrix, kofaktor

Lad $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$ matrix.
Undermatricen A_{ij} er den $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fremkommer ved at slette række nr. i og søjle nr. j fra A.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{ij}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kofaktoren C_{ij} er givet ved: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$. Eks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & -1 \\ -4 & -5 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \; A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \; C_{12} = (-1)^{1+2} det\,(A_{12})$$

Determinanter for $n \times n$-matricer

Med kofaktoren C_{ij} givet ved $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Definition af determinant

Vi har
$$\det A := a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}.$$

Sætning: Udvikling ~~a~~efter række nr. i

Vi har
$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}.$$

Sætning: Udvikling ~~a~~efter søjle nr. j

Vi har
$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

Eksempler

3×3-matricer

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \det \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \det \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

Triangulære $n \times n$-matricer (nedre)

$$\det \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & u_{22} & 0 & 0 \\ * & \cdots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & u_{nn} \end{bmatrix} = u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}.$$

Determinanter og rækkeoperationer

Følgende gælder for en $n \times n$ matrix A (med rækkerne $\vec{r}_1, \dots \vec{r}_n$)

- Fremkommer matricen B ved at addere k gange række i fra A til række j $(i \neq j)$, da gælder: $\det B = \det A$.

$$A = \begin{bmatrix} - - \vec{r}_i - - \\ \vdots \\ - - \vec{r}_j - - \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} - - \vec{r}_i - - \\ \vdots \\ - - \vec{r}_j + k\vec{r}_i - - \end{bmatrix}$$

- Fremkommer matricen B ved at ombytte række i og j fra A $(i \neq j)$, da gælder: $\det B = -\det A$.

$$A = \begin{bmatrix} - - \vec{r}_i - - \\ \vdots \\ - - \vec{r}_j - - \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} - - \vec{r}_j - - \\ \vdots \\ - - \vec{r}_i - - \end{bmatrix}$$

- Fremkommer matricen B ved at gange række i fra A med k, da gælder: $\det B = k \det A$.

$$A = \begin{bmatrix} - - \vec{r}_i - - \\ \vdots \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} - - k\vec{r}_i - - \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Regneregler

Sætning

En kvadratisk matrix A er invertibel hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.

Sætning

Lad A og B være $n \times n$-matricer. Da gælder

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Eksempler:

For A invertibel har vi:

$$AA^{-1} = I_n \Rightarrow 1 = \det(A)\det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

Store matricer

For en kvadratisk matrix A med trappeform $E_3E_2E_1A = T$, hvor $E_n, n = 1, 2, 3$ er elemntære matricer:

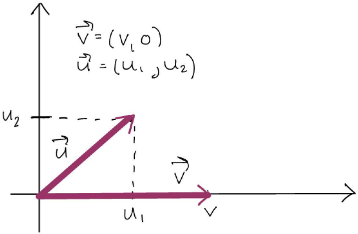
$$\begin{aligned} det(E_3)det(E_2)det(E_1)det(A) &= det(T) \\ \Rightarrow det(A) &= \frac{1}{(det(E_3)det(E_2)det(E_1))}det(T) \end{aligned}$$

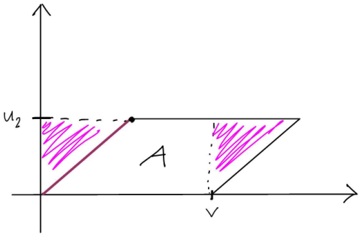
- Hvis E_n svarer til at lægge k gange række j til række i, så er $det(E_n) = 1$.
- Hvis E_n svarer til at ombytte to rækker, så er $det(E_n) = -1$.
- Hvis E_n svarer til at gange en række med konstanten $k \neq 0$, så er $det(E_n) = k$

Da T er på trappeform, er den øvre triangulær, dvs. vi kan let finde determinanten $det(T)$ ved at gange indgangene på diagonalen sammen. Eksempel:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad det(T) = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 6$$

Areal af parallelogram





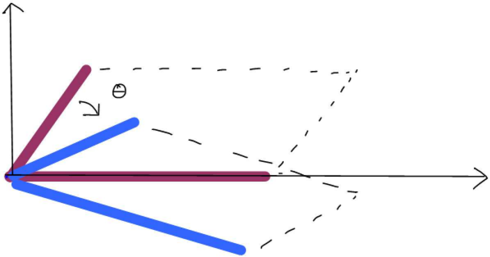
Hvis $\vec{v} = (v, 0)$, er arealet af parallelogrammet med sider $\vec{u}$ og $\vec{v}$ givet ved

$$A = |vu_2| = |vu_2 - 0u_1| = \left| det\left(\begin{bmatrix} v & u_1 \\ 0 & u_2 \end{bmatrix}\right)\right| = |det([\vec{v}\ \vec{u}])|.$$

Areal af parallelogram

Hvis både $\vec{u}$ og $\vec{v}$ roteres med vinkel θ ændres arealet ikke, og

$$|det\,([A_\theta\vec{u}\ A_\theta\vec{v}])| = |det\,(A_\theta[\vec{u}\ \vec{v}])| = |det(A_\theta)det([\vec{u}\ \vec{v}])| = |det([\vec{v}\ \vec{u}])| = A$$



Areal af parallelogram med sider $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$

$$A = |det([\vec{v}\ \vec{u}])| = \left| det \left(\begin{bmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{bmatrix} \right) \right|.$$