

Repetition 13

Lad $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$ være en 3×4 -matrix.

$$\text{Null}(A) = \{ \text{alle løsninger } \vec{x} \text{ til } A\vec{x} = \vec{0} \}$$

$$\text{Col}(A) = \{ \text{alle } \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \text{ hvor der findes } \vec{x} \in \mathbb{R}^4, \text{ så } \vec{y} = A\vec{x} \}$$

$$= \text{span} \left(\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix} \right\} \right)$$

$$\text{Row}(A) = \text{span} \left(\left\{ [a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14}]^T, [a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{24}]^T, [a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ a_{34}]^T \right\} \right)$$

$$= \text{span} \left(\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ a_{34} \end{bmatrix} \right\} \right) = \text{Col}(A^T)$$

$B = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_d \}$ er en basis for underrummet $V \subset \mathbb{R}^n$ hvis:

i) $V = \text{span}(B)$ (B udspænder V)

ii) B er lineært uafhængig.

Dimension

Hvis $\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_d \}$ er en basis for V , så har V dimension d : $\dim(V) = d$.

Dimensionsætning for matrixer: Lad A være $m \times n$ matrix

$$\underbrace{\text{Dim}(\text{Col } A)}_{= \text{Rank}(A)} + \text{Dim}(\text{Null}(A)) = n$$

Opgave eksempel:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 + x_4 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 \\ -x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

- Find en basis for billedet ("the range") af T
- Hvis nulrummet for T er forskelligt fra nul, find en basis for nulrummet for T

Opgaveeksempel:

Find en basis for $\left\{ \begin{bmatrix} 5r-3s \\ 2r \\ 0 \\ -4s \end{bmatrix}; r, s \in \mathbb{R} \right\}$, find dimensionen