Repetiton 14

$\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ er en basis for $\mathbb{R}^n$, hvis $\mathcal{B}$ er lineært uafhængig.

For $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, findes der da entydigt bestemte koefficienter $c_1, \dots, c_n$, så

$$(*1) \qquad \vec{v} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \dots + c_n \vec{b}_n$$

Vi samler koefficienterne i en ny vektor

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

, $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ kaldes "koordinatvektoren for $\vec{v}$, relativt til basen $\mathcal{B}$".

Vi kan skrive $(*1)$ vha. matrix-vektor produktet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}}_{= B} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{[\vec{v}]_{\mathcal{B}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{v}}$$

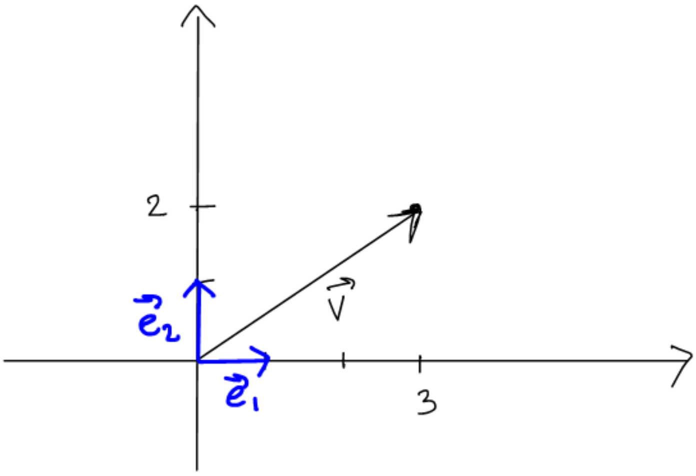
eller kort: $B[v]_{\mathcal{B}} = \vec{v} \qquad (*2)$

Hvis vi ganger $(*2)$ med B^{-1} på begge sider:

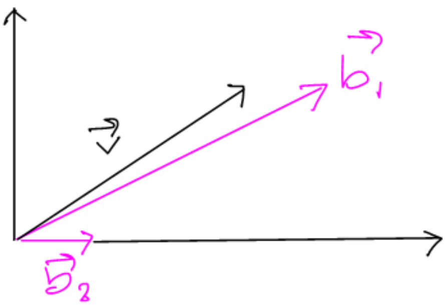
$$\underbrace{B^{-1}B}_{\substack{\text{identitets matricen} \\ I_n}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\vec{v} \iff [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\vec{v}$$

eks:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$



$$\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$



$$\vec{v} = 1 \cdot \vec{b}_1 + (-1)\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

så $\quad [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Om at finde B^{-1}:

For 2×2 matrix $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, har vi

en explicit formel ((SIF) side ca. 200)

$$B^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Hvis B er en 2×2 rotations matrix for vinklen θ

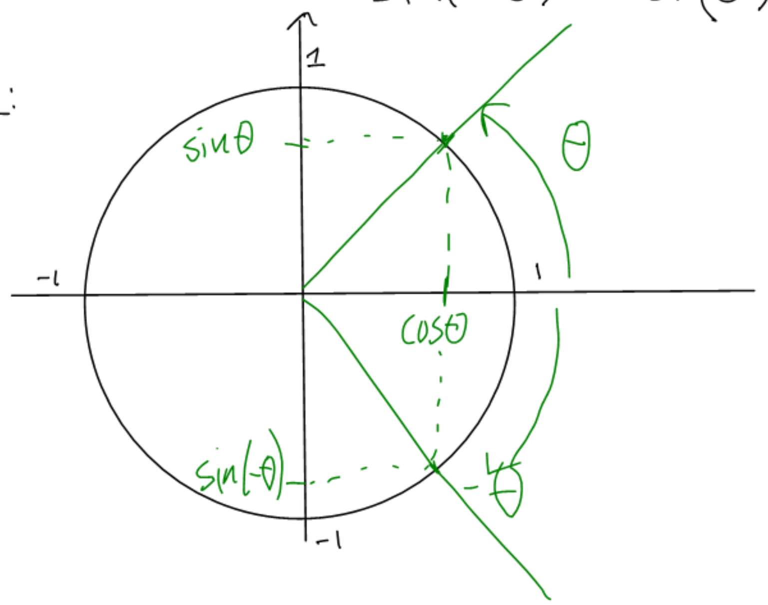
$$B = R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$ så findes B^{-1}

nemt, da $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$! $\rightarrow$ hvis man også bruger

cosinus og sinus reglerne: $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

enhedscirklen:



Hvis B er en 3×3 matrix, kan man finde B^{-1} ved rækkereduktion

$$\left[\, B \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; B^{-1} \right]$$

(generelt i $\mathbb{R}^n$: $[B \mid I_n] \sim \dots \sim [I_n \mid B^{-1}]$

OPGAVEEKSEMPLER:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \text{find } [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{dvs. } c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

totalmatrix:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \end{array}\right] \overset{R_2 \sim R_2 + R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{R_1 \sim R_1 + R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 = 7 \\ 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = 2 \end{cases}$$

dvs. $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$.

" Find den unikke representation af $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ som en lin. komb. af $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ "

a, b er faste reelle tal. Find c_1, c_2, så

$$c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Definer matricen

$$B = [\vec{b}_1 \; \vec{b}_2] = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

c_1, c_2 skal altså løse $B \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$,
eller (gang m. B^{-1} på begge sider)

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = I_2 \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = (B^{-1} B) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

B^{-1} kan findes på flere måder:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(-5)\cdot(-2)-(+3)\cdot(+3)}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix},$$ (jeg bruger formelen i (SIF) side 200)

så $$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5a-3b \\ -3a-2b \end{bmatrix}$$

dvs $$c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 = (-5a-3b)\vec{b}_1 + (-3a-2b)\vec{b}_2 = \vec{u}$$