Repetition 16:

Matrix repræsentationer af lineære transformationer

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineær.

Standardmatrix: $A = [T(\vec{e}_1)\ T(\vec{e}_2) \cdots T(\vec{e}_n)]$, $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ .. $\vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ er standardbasen.

Lad $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n)$ være en basis for $\mathbb{R}^n$, Lad $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

Koordinatvektoren $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ for $\vec{v}$, med hensyn til $\mathcal{B}$, er de entydigt bestemte koordinater $c_1, c_2, \ldots, c_n$, der opfylder

$$c_1\bar{b}_1 + c_2\bar{b}_2 + \ldots + c_n\bar{b}_n = \vec{v}$$

kort: $B[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \vec{v}$, $B = [\bar{b}_1\ \bar{b}_2 \cdots \bar{b}_n]$

Vektoren $T(\vec{v})$ ligger også i $\mathbb{R}^n$, så $T(\vec{v})$ har en koord. vektor mht. $\mathcal{B}$:

$$B[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = T(\vec{v}) = A\vec{v}$$

$$\Downarrow$$

$$[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = B^{-1}(A\vec{v}) \qquad \left(= B^{-1}AB(B^{-1}\vec{v}) = B^{-1}AB[\vec{v}]_{\mathcal{B}} \right)$$

Vi indfører matrix repræsentationen af T mht. $\mathcal{B}$:

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\underline{AB} \qquad \Leftrightarrow \qquad B[T]_{\mathcal{B}}B^{-1} = A$$

så har vi:

$$[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

Alternativ formel for $[T]_{\mathcal{B}}$:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\bar{b}_1)]_{\mathcal{B}}\ [T(\bar{b}_2)]_{\mathcal{B}} \cdots [T(\bar{b}_n)]_{\mathcal{B}} \right]$$

Opgaveeksempel:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

find $[T]_{\mathcal{B}}$.

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\underbrace{2\cdot 1 - 3\cdot 1}_{-1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1} A B \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

AB:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\cdot 2 - 1\cdot 3 & 1\cdot 1 - 1\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 3 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$B^{-1}(AB)$:
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -2 \end{bmatrix}, \Rightarrow [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -2 \end{bmatrix}$$

Opgaveeksempel:

$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$, find std-matrix for T.

$$B[T]_{\mathcal{B}}B^{-1} = \underbrace{BB^{-1}}_{I_2} A \underbrace{BB^{-1}}_{I_2} \iff A = B[T]_{\mathcal{B}}B^{-1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{1\cdot 3 - (-2)\cdot(-2)} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \end{array}, \quad B[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \end{array}, \quad A = B[T]_{\mathcal{B}}B^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Opgaveeksempel:

$$\mathcal{B} = \Big(\underbrace{\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}}_{\bar b_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{\bar b_2} \Big), \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

find $[T]_{\mathcal{B}}$, std. matrix for T, eksplicit formel for $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$.

$$T(\bar b_1) = 1 \cdot \bar b_1 - 2\, \bar b_2 \Rightarrow [T(\bar b_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

$$T(\bar b_2) = 2 \cdot \bar b_1 - 1\, \bar b_2 \Rightarrow [T(\bar b_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

i)
$$[T]_{\mathcal{B}} = \Big[[T(\bar b_1)]_{\mathcal{B}} \; [T(\bar b_2)]_{\mathcal{B}} \Big] = \begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & -1\end{bmatrix} \leftarrow$$

ii)
$$B = \begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{1\cdot 0 - 3\cdot 1}\begin{bmatrix}0 & -1\\-3 & 1\end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & -1\\-3 & 1\end{bmatrix}$$

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

$$A = B[T]_{\mathcal{B}}B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\3 & -1\end{bmatrix}}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -1\\-3 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & -2\\18 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\6 & -1\end{bmatrix}$$