Definition:

Lad A være en $n \times n$ matrix. En ikke-nul vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ kaldes en egenvektor for A, hvis

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

hvor λ er en skalar, λ kaldes en egenværdi for A med egenvektor $\vec{v}$

ex

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

egenværdi

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 3 \\ -3 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \vec{v}$$

ex

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

egenværdi

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 \\ 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hvordan finder man egenværdier?

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \iff (A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0} \qquad (\lambda\vec{v} = \lambda I_n \vec{v})$$

så $\vec{v}$ skal løse systemet $B\vec{v} = \vec{0}$ og være forskellig fra nul.

dvs. B må ikke være inverterbar (vi skal have mindst én fri variabel)

$$\Rightarrow \det B = 0 = \det(A - \lambda I_n)$$

← bruger til at bestemme λ

Karakteristisk polynomial

ex $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right)$$

$$= (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 \cdot 1$$

$$= \lambda^2 + (-4-2)\lambda + 8 - 3$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 5 \qquad \text{(andengradspol i } \lambda!\text{)}$$

Vi skal altså løse: $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$

$\sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{D}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$\lambda = 5$ eller $\lambda = 1$!

Hvordan finder vi egenvektorer / basis for egenrum?

$\vec{v}_i$ skal løse $[A - \lambda_i I_n]\vec{v}_i = \vec{0}$

→ indsætter de kendte λ_i efter tur og løser

$$\left(A - \lambda_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ løsning på parametriseret vektorform

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\bar{v}_1} \left(+ t \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\bar{v}_2} + q \ldots \right)$$

man kan gange vektorerne med skalarer α, β uden at ændre span!

$$\text{Egenrum} = \text{span}(\underbrace{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots}_{\text{egenvektorer}}) = \text{span}(\alpha \bar{v}_1, \beta \bar{v}_2, \ldots) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ex $\quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 1 \; , \; \lambda_2 = 5$

$\underline{\lambda_1 = 1:}$

$$\left(A - 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{= \vec{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

totalmatrix: $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$R_2 \sim R_2 - R_1 \quad \sim \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$R_1 \sim \frac{1}{3} R_1 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = T$

p

T er totalmatrix for $\quad 1 \cdot x_1 + \frac{1}{3} x_2 = 0 \quad , \quad x_2$ fri

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} x_2 = -\frac{1}{3} s \\ x_2 = \qquad\quad = s \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor}}$$

Egenrum hørende til egenværdien $1 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

$$= \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

$\underline{\lambda_2 = 5:}$

$$\left[A - 5\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right]\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix}4&1\\3&2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5&0\\0&5\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \begin{bmatrix}-1&1\\3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \text{totalmatrix} \left[\begin{array}{cc|c}-1&1&0\\3&-3&0\end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R_2 \sim R_2+3R_1} \left[\begin{array}{cc|c}-1&1&0\\0&0&0\end{array}\right] \quad \underset{\sim}{R_1 \sim -R_1} \left[\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right] = T$$

T totalmatrix for $x_1 - x_2 = 0$, x_2 fri

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 = s \\ x_2 = = s \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

Alle valg af s giver en egenvektor med egenværdien 5. vi vælger $s=1$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

<u>Egenrum:</u>

$$\boxed{\text{Egenrummet hørende til egenværdien } \lambda \text{ er } \mathrm{Null}(A - \lambda I_n)}$$

For eksemplerne ovenfor, er alle $\vec{v} \in \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$ en egenvektor med egenværdi 5.
$\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$ kaldes egenrummet hørende til egenværdien 5.