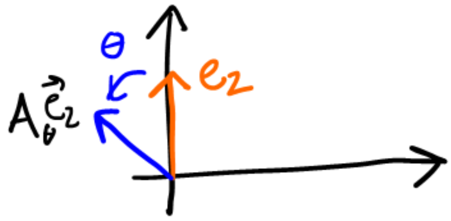
Opgavesæt 3 (S/F)

1,2#17:

$\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$ rad , $\vec{u} = \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

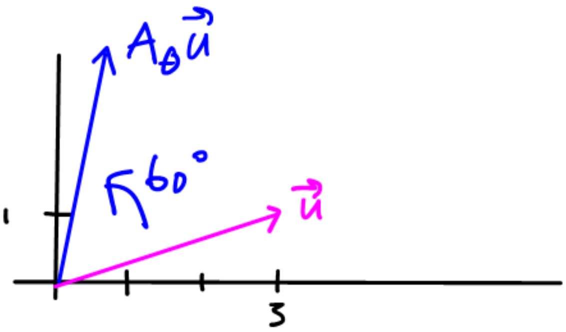


$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$A_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$A_{\frac{\pi}{4}} \vec{u} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}}$

1,2#19



$\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$A_\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $A_\theta \vec{u} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0{,}65 \\ 3{,}10 \end{bmatrix}$

1,3#1

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \cdot x_1 + (-1)x_2 + 2x_3 = 0 \\ 1 \cdot x_1 + 3x_2 + 0x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

koefficientmatrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

totalmatrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

1,3#3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 3 \\ (-1) \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 2 \\ (-3) \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

koefficientmatrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

totalmatrix:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

1,3#5

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \cdot x_1 + 2x_2 + (-3) \cdot x_3 = 4 \\ (-1)\, x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = -6 \\ 2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Koefficientmatrix:

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

totalmatrix:

$$\underline{\underline{\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]}}$$

1,3#7

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & 6 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim} \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}}}$$

1,3#9

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & 6 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to R_2 + 2R_1}{\sim} \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}}}$$

1,3 #11

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & 6 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to \frac{1}{2} R_3}{\sim} \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & 6 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}}$$

1,3 #23

$$(*_1) \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_4 = 6 \\ \qquad x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases}, \text{ indsæt } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 - 4 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = 1 + 8 - 3 = 6 & \checkmark \\ -5 - 2 \cdot (-1) = -5 + 2 = -3 & \checkmark \end{cases}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$ løser $(*_1)$.

1.3 #25

$$(*_1) \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_4 = 6 \\ \qquad x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases}, \text{ indsæt } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3 + 3 = 6 & \checkmark \\ 2 - 2 \cdot 1 = 2 - 2 = 0 & \lightning \end{cases}$$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ løser ikke $(*_1)$.

1.3#39

$$[R\ \vec{c}] = [1\ \ -1\ |\ 2]$$

i) ikke-pivot søjler i $R = [1\ -1]$ er søjle 2.

ii) tilhørende ligningsystem:

$$1 \cdot x_1 - 1x_2 = 2$$
$$\Updownarrow$$
$$x_1 = 2 + x_2 \qquad (x_2 \text{ fri variabel})$$

iii) indfør parameter s:

$$x_2 = s$$

Generel løsn:

iv) $$\begin{cases} x_1 = 2 + s & = 2 + 1 \cdot s \\ x_2 = \quad s & = 0 + 1 \cdot s \end{cases} \quad , s \in \mathbb{R}$$

v) generel løsning på vektorform

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

1.3#43

$$[R\ \vec{c}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \leftarrow \text{række 2}$$

Række 2 af totalmatricen har pivot i den sidste søjle. Denne række svarer til den lineære ligning

$$0 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1,$$

der ingen løsning har.

Ligningssystemet er ikke-konsistent!

1.3 # 41

$(*_2)$ $[R\ \vec{c}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

(ligningssystemet er konsistent, da sidste søjle ikke er pivot-søjle).

i) ikke-pivot søjler i $R = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$: søjle 2.

$\Rightarrow x_2$ er fri variabel.

ii) $(*_2)$ svarer til systemet:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 6 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 6 + 2x_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad (x_2 \text{ fri variabel})$$

iii) Indfør parameter s:

$$x_2 = s$$

iv) Generel løsning:

$$\begin{cases} x_1 = 6 + 2s & = 6 + 2 \cdot s \\ x_2 = s & = 0 + 1 \cdot s \end{cases} \quad , s \in \mathbb{R}$$

v) Generel løsning på vektorform:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , s \in \mathbb{R}$$

1.3#47

$$[R\ \vec{c}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

(ligningssystemet er konsistent, da der ikke er pivot i sidste søjle i $[R\ \vec{c}]$ totalmatricen)

i) ikke-pivot søjler i

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$ er søjle 4

$\Rightarrow x_4$ er fri variabel.

ii) Tilhørende ligningssystem:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 - 3x_4 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 - 4x_4 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \begin{cases} x_1 = 0 + 3\cdot x_4 \\ x_2 = 0 + 4\cdot x_4 \\ x_3 = 0 - 5x_4 \end{cases} \quad (x_4 \text{ fri variabel})$$

iii) Indfør parameter s:

$x_4 = s$

iv) Generel løsning:

$$\begin{cases} x_1 = 0 + 3\cdot s = 3\cdot s \\ x_2 = 0 + 4\cdot s = 4\cdot s \\ x_3 = 0 - 5s = (-5)\cdot s \\ x_4 = s = 1\cdot s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

v) Generel løsning på vektorform

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

1.3#49

$$[R\ \vec{c}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

(Ligningssystemet er konsistent, da sidste søjle i totalmatricen ikke har pivot).

i) Søjler uden pivot i $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: søjle 1.

$\Rightarrow x_1$ er fri variabel

ii) Tilhørende ligningssystem:

$$\begin{cases} 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0 x_4 = -3 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = -4 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \begin{cases} x_2 = -3 + 0\cdot x_1 \\ x_3 = -4 + 0\cdot x_1 \\ x_4 = 5 + 0\cdot x \end{cases}$$

iii) Indfør parameter s for den frie variabel s:

$x_1 = s$

iv) <u>Løsning</u>:

$$\begin{aligned} x_1 &= s &&= 0 + 1\cdot s \\ x_2 &= -3 + 0\cdot s &&= -3 + 0\cdot s \\ x_3 &= -4 + 0\cdot s &&= -4 + 0\cdot s \\ x_4 &= 5 + 0\cdot s &&= 5 + 0\cdot s \end{aligned} \quad , \ s \in \mathbb{R}$$

v) Løsning på vektorform:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \ s \in \mathbb{R}$$