(SIF) opgavesæt 6:

1.7 #1

Betragt $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$.

vi ser, at $\vec{v}_2 = 2 \cdot \vec{v}_1$ (ved f.eks. at sammenligne første koordinater.)

$\Rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ er lin. afhængigt.

1.7 #5

hver søjle i koefficientmatricen $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = A$

er pivot-søjle, så ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har kun én løsning: $\vec{x} = \vec{0}$. $\Rightarrow$ vektorerne er lineært uafhængige.

1.7 #7

Betrat $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}$ og $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

vi ser, at $\vec{v}_1 = (-3)\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$. $\Rightarrow S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ er lin. afhængigt.

1.7 #9

En mængde bestående af en enkelt, ikke-nul vektor er lin. uafh! $\Rightarrow \left\{\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$ er lin. uafh.!

1.7 #11

Betragt $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

vi "ser", at $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$

$\Rightarrow S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ er lin. afh.

1.7 #13

(udtynd S til en lin. uafh. mængde)

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \right\} = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \}$$

$\vec{v}_2 = -2\vec{v}_1$, så S lin.-afh. (og $\vec{v}_2 \in \text{span}(\{\vec{v}_1\})$)

$\tilde{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ er lin. uafh. og $\text{span}(S) = \text{span}(\tilde{S})$

1.7 #15

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

vi fjerner $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, da ethvert span indeholder $\vec{0}$

$$\tilde{S} = \left\{ \underset{\vec{v}}{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{\vec{w}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

vi ser, at

$v_1 = -3 w_2$, men

$v_2 = \frac{1}{3} w_2$, så

$\vec{v}$ og $\vec{w}$ er lineært uafh.

$\text{span}(S) = \text{span}(\tilde{S})$, og $\tilde{S}$ er lin. uafh!

1.7 #23

koefficientmatrix: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{R_3 \to R_3 + 2R_1}{\overset{R_2 \to R_2 + R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\overset{R_3 \to R_3 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T$$

Der er <u>ikke</u> pivot i hver søjle af T, så $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er lineært afhængig.

1.7 # 25

koefficientmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \underset{R_4 \to R_4 + R_1}{\overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \underset{R_4 \to R_4 + R_2}{\overset{R_3 \to R_3 + 5R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_4 \to R_4 - 5R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T$$

alle søjler at T er pivot-søjler, så

$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ er lin. uafh.

1.7 # 27

koefficientmatrix: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A$

$$\overset{R_4 \to R_4 + 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to R_3 + R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_4 \to R_4 - 3R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = T$$

alle søjler i T har pivot $\Rightarrow$

søjlerne i A er lin. uafh

1.7#41

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ r \end{bmatrix} \right\} \qquad (r \in \mathbb{R})$$

For hvilke værdier af r er S lineært afhængig?

S lineært afh.

$\Updownarrow$

Der findes ikke-pivot søjle i

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & r \end{bmatrix} \overset{R_1 \to \frac{R_1}{-2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & r \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_3 \to R_3 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & r-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \overset{R_3 \to 2 \cdot R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2r-1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_3 \to R_3 + 5R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2r+4 \end{bmatrix}$$

hvis $2r + 4 = 0$ så er 3 søjle ikke-pivot

$2r+4=0 \iff \underline{r = -2}$