(SIF) Opgavesæt 7

2,7#1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$$

A har 3 søjler, så T_A må være defineret på $\mathbb{R}^3$. A har 2 rækker, så dispositionsmængden for T_A må være $\mathbb{R}^2$

$$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.$$

2,7#3

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_C(\vec{x}) = C\vec{x}$$

C har to søjler, så definitionsmængden for T_C må være $\mathbb{R}^2$. C har 3 rækker, så dispositionsmængden for T_C må være $\mathbb{R}^3$.

$$T_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

2,7#7

$$T_A\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= 3\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 + 3 + 2 \\ 12 + 0 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

2,7#11

$$T_B\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = B\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-4)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 + 10 + 0 \\ -8 - 2 + 3 \\ 0 + 8 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2,7 # 21

Find n og m, så $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

T er defineret på $\mathbb{R}^3$ $\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right.$ har 3 koordinater$\Big)$

T tager værdier i $\mathbb{R}^2$ $\left(\begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}\right.$ har 2 koord.$\Big)$

dvs. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, så $n = 3$, $m = 2$.

2,7 # 23

Find n og m, så $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 4x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ har to koordinater, så $n = 2$

$\begin{bmatrix} x_1 - 4x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$ har 4 koordinater, så $m = 4$.

2,7 # 25

Find en standardmatrix for $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$\vec{e}_1$ i $\mathbb{R}^2$ er $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(x_1 = 1,\ x_2 = 0)$

$\vec{e}_2$ i $\mathbb{R}^2$ er $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(x_1 = 0,\ x_2 = 1)$

$$T(\vec{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Standardmatricen for T $= \left[T(\vec{e}_1)\ T(\vec{e}_2)\right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}}$.

2,7 # 27

Find standardmatrizen for $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ defineret ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$$

$\vec{e}_1$ i $\mathbb{R}^3$ er $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2$ i $\mathbb{R}^3$ er $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_3$ i $\mathbb{R}^3$ er $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

så $T(\vec{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1+0+0 \\ 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0+1+0 \\ 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(\vec{e}_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0+0+1 \\ 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Standardmatricen for $T = \left[T(\vec{e}_1)\ T(\vec{e}_2)\ T(\vec{e}_3)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.7 # 29

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$

i $\mathbb{R}^2$: $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 2\cdot 1 - 3 \cdot 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. $T(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} 0-1 \\ 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Standardmatricen for $T = \left[T(\vec{e}_1)\ T(\vec{e}_2)\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2,7 # 31

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \\ 3x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

i $\mathbb{R}^2$: $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 0 \\ 3 \cdot 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} 0-1 \\ 0 \\ 3 \cdot 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Standardmatricen for $T = [T(\vec{e}_1)\ T(\vec{e}_2)] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}$

2,7 # 33

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (det samme som $T\vec{v} = \vec{v}$ med $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.)

i $\mathbb{R}^3$: $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T(\vec{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(\vec{e}_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Standardmatricen for $T = [T(\bar{e}_1)\ T(\bar{e}_2)\ T(\bar{e}_3)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$

identitetsmatricen for $\mathbb{R}^3$.

2,8 # 1

Find en mængde af vektorer der udspænder billedmængden for $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, defineret ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Standardmatricen for $T = A = [T(\bar{e}_1) T(\bar{e}_2)] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

For at finde en mængde af vektorer, der udspænder Ran(T), billedmængden af T, skal vi udtynde mængden af søjlevektorer i A, $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$ til en lineært uafhængig mængde.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_1 \to 2R_1} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

hver søjle i $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ er en pivot-søjle, så $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ er lineært uafh.

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Ran}(T) = \operatorname{span}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

2.8#3

Find en mængde af vektorer, der udspænder $\operatorname{Ran}(T)$, hvor $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ er defineret ved:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Vi finder standardmatricen for T:

$$T(\vec{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 0 \\ 1 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 - 1 \\ 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Standardmatricen for $T = [T(\vec{e}_1) \; T(\vec{e}_2)] = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ har

søjlevektorerne $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = S$

vi udtynder S til en lineært uafh. mængde:
ved at finde pivot-søjlerne i $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 \Leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ begge søjler er pivotsøjler, så $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er

lineært uafhængig og udspænder billedet af T, $\operatorname{Ran}(T)$

$$\operatorname{Ran}(T) = \operatorname{span}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right)$$

Opg. 1:

er $f(x) = x^2 + 1$ surjektiv, injektiv, bijektiv?

f har definitionsmængde $\mathbb{R}$ og dispositionsmængde $\mathbb{R}$, vi skriver kort $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$.

surjektiv

Kan alle værdier i $\mathbb{R}$ "nås" af f, dvs findes der for alle $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, så $f(x) = y$? nej! for $f(x) \geq 1$ for alle x., så sætter vi $y = -1$, findes der intet x, så $f(x) = -1$.
skriver kort: $Ran(f) = [1, \infty) \neq \mathbb{R}$, så f er ikke surjektiv.

injektiv

Hvis f skulle være injektiv, så skulle der gælde, at for alle $y \in [1, \infty) = Ran(f)$ så findes der kun et $x \in \mathbb{R}$, så $f(x) = 1 + x^2 = y$.
tag f.eks. $y = 2$. vi løser $1 + x^2 = 2$:

$$1 + x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Der findes altså et y (-1), og to x-værdier $(1$ og $-1)$, så $f(-1) = f(1) = -1$, derfor er f ikke injektiv.

bijektiv

f er hverken injektiv eller surjektiv, så f er ikke bijektiv.

(bemærk, at for at bevise, at f ikke var surjektiv eller injektiv, var det nok med et enkelt modeksempel! (i begge tilfælde) - det er en typisk måde at vise at noget ikke gælder → man finder et modeksempel!).

Opg. 2

er $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved $f(x) = x^3+1$ surjektiv, injektiv?

Surjektiv:

Vi laver en hurtig funktionsanalyse:

① hvor har vi vandret tangent? (hvor er $f'(x)=0$?)

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0$.

② er $x=0$ et lokalt max eller lokalt min?

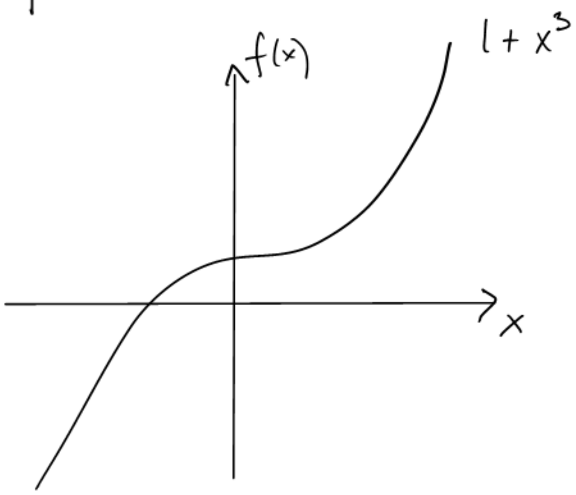
→ vi checker fortegnet af $f'(x)$ i to punkter på hver side af $x=0$: (vælger $x=-1$, $x=1$)

$f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$

$f'(1) = 3(1)^2 = 3$

funktionen er altså voksende både til venstre og til højre for x. faktisk, da $f'(x) = 3x^2 > 0$ for $x \neq 0$, er f <u>strengt</u> voksende.

Grafen for $1+x^3$ er:



$f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$, og $f(x) \to -\infty$ for $x \to -\infty$.

Vi konkluderer:

f er kontinuert, $f(x) \to \infty$, $x \to \infty$
$f(x) \to -\infty$, $x \to -\infty$
og f er strengt voksende på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

derfor er $Ran(f) = \mathbb{R}$, og f er injektiv.

Da f er både injektiv og surjektiv, er f bijektiv.

opg 3

Hvis x betegner en person i DK, og $f(x)$ betegner person x's cpr-nummer, så må to personer ikke have samme cpr-nummer, så f er injektiv $\left(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \right)$.

Hvis der fødes et nyt barn, skal der stadig være et nummer til dette barn, vi må altså aldrig have brugt alle cpr-numre.

Så $\{ f(x) \mid x \text{ er person i DK} \}$

$\neq \{ y \mid y \text{ er et helt tal på 10 ciffre, der kan bruges som et cpr-nummer} \}$

så (i min fortolkning) er f ikke surjektiv.

$\Downarrow$

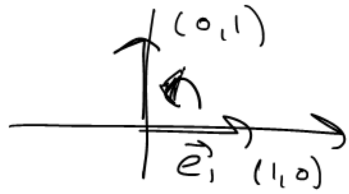
f ikke bijektiv.

2.8 #61

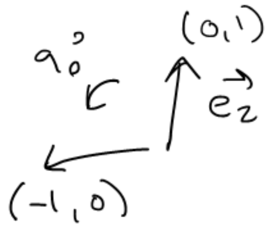
$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\vec{v} = \vec{v}$ roteret $90°$.

Standardmatricen for T:

$T(\vec{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$



$T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$



Standarmatricen for $T = [T(\bar{e}_1)\ T(\bar{e}_2)] = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} = A$

(kunne også have fundet A ved $A = \begin{bmatrix}\cos 90° & -\sin 90°\\ \sin 90° & \cos 90°\end{bmatrix}$)

for at finde nulrummet, løser vi

$A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ for x_1, x_2.

$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-x_2 = 0\\ x_1 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = 0\\ x_2 = 0\end{cases}$

a) så $\text{Null}(T) = \left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\} = \{\vec{0}\}$

b) T er lineær og har $\text{Null}(T) = \{\vec{0}\} \Rightarrow T$ injektiv.

c) Søjlerne i A er lin. uafh. da begge søjler er pivot-søjler, så $\text{Ran}(T) = \text{span}\left(\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\right\}\right)$

$= \text{span}\left(\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}\right) = \mathbb{R}^2$

d) T er surjektiv.

2.8 #65

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Standardmatrix for T: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

søjlerne i A er $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{0}\}$

a) Vi løser $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ingen pivot i 3 søjle
$\Rightarrow$ x_3 fri variabel.
sæt $x_3 = s$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + s\cdot 0 \\ x_2 = 0 + s\cdot 0 \\ x_3 = 0 + s\cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s\vec{e}_3$$

så $\mathrm{Null}(T) = \mathrm{span}\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$ (alle punkter på z-aksen)

b) $\mathrm{Null}(T) \neq \{\vec{0}\}$, så T er ikke injektiv.

c) $\mathrm{Ran}(T) = \mathrm{span}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right)$ (x-y planet)

d) $\mathrm{Ran}(T) \neq \mathbb{R}^3$, så T er ikke surjektiv.

2,8#13

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Standardmatricen for $T = \left[T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A$

Vi løser $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Koefficientmatrix: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\mathrm{Null}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

2.8# 15

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$$

Standardmatrix: $A = \left[T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi løser $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_1 \to R_1 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = R$$

(søjle 3 har ingen pivot $\Rightarrow$ x_3 fri variabel

$$R\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

indfører parameter $s = x_3$
flytter fri variabel på højre side i (*1)

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 = -s \\ x_3 = s \end{cases}$$

$$\Updownarrow \begin{cases} x_1 = 0 + 0 \cdot s \\ x_2 = 0 - 1 \cdot s \\ x_3 = 0 + 1 \cdot s \end{cases}$$

$$\Updownarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad s \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Null (T) = alle løsninger til $A\vec{x} = 0$

$$= \operatorname{span}\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$$

da $\operatorname{Null}(T) \neq \{\vec{0}\} = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, er T ikke injektiv.

2.8#17

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

Standardmatrix $= A = [T(\bar{e}_1)\ T(\bar{e}_2)\ T(\bar{e}_3)]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Løser $A\vec{x} = \vec{0}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \underset{R_2 \to R_2 - R_1}{\overset{R_3 \to R_3 - 2R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_1 \to R_1 - 2R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$ ingen pivot i søjle 3 $\Rightarrow$ x_3 fri variabel

$$R\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \iff \begin{cases}1x_1 - x_3 = 0\\ x_2 + x_3 = 0\end{cases}$$

indfører parameter $x_3 = s$, flytter x_3 på højre side

$$\begin{cases}x_1 = x_3 = s\\ x_2 = -x_3 = -s\\ x_3 = \quad = s\end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right.$$

$$\Rightarrow \text{Null}(T) = \text{span}\left(\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}\right)$$

Da $\text{Null}(T) \neq \{\vec{0}\}$ er T ikke injektiv.

2,8 # 25

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2x_1 + 3x_2\\4x_1 + 5x_2\end{bmatrix}$

Standardmatrix $A = \left[T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)\ T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\right]$

$$= \begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}$$

finder nulrummet $\iff$ løser $A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - 2R_3}{\sim} \begin{bmatrix}2&3\\0&-1\end{bmatrix} \overset{R_2 \to -R_2}{\sim} \begin{bmatrix}2&3\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\overset{R_1 \to R_1 - 3R_2}{\sim} \begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix} \overset{R_1 \to \frac{1}{2}R_1}{\sim} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} = R$$

$$R\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \vec{0} \iff \begin{matrix}x_1 = 0\\x_2 = 0\end{matrix} \iff \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$\text{Null}(T) = \{\vec{0}\} \quad \Rightarrow T$ er injektiv.

2.8 #29

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \end{bmatrix}$

Standardmatricen for $T = A = \left[T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \overset{R_3 \to R_3 + R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to R_2 + R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

der er ikke pivot i sidste søjle, så der er en fri variabel (x_3), så $\text{Null}(T) \neq \{\vec{0}\}$.

$\Rightarrow$ T er ikke injektiv.

2.8 #33

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}$

Std. matrix: $A = [T(\bar{e}_1) \; T(\bar{e}_2)] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$A \overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

der er pivot i begge rækker $\Rightarrow$ T er surjektiv.

2.8 #35

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$

Std. matrix: $A = [T(\bar{e}_1) \; T(\bar{e}_2)] = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

A har kun to søjler, men 3 rækker, så der kan ikke være pivot i hver række
$\Rightarrow$ T ikke surjektiv.

2.7#57

T lineær, $T\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$

bemærk at da $T(s\vec{v}) = sT(\vec{v})$, så kan vi bestemme $T(s\vec{v})$ for alle $s \in \mathbb{R}$, hvis vi kender $T(\vec{v})$.

Findes der s, så $s \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix}$?

ja $\rightarrow$ $s = 2$.

$$T\left(\begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = T\left(2 \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot T\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2.7# 77

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1+y_1) + (x_2+y_2) \\ 2(x_1+y_1) - (x_2+y_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ 2y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$T\left(s\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} sx_1 + sx_2 \\ 2sx_1 - sx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(x_1+x_2) \\ s(2x_1 - x_2) \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$= sT\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$$

da T opfylder linearitetsbetingelserne, er T lineær.

2.7#73

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2(x_1+y_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2y_1 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$T\left(s\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2sx_1 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = sT\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$$

T er lineær.

2.7#79

$$T(x) = \begin{bmatrix} \sin x \\ x \end{bmatrix}$$

$$T(\pi + \pi) = \begin{bmatrix} \sin(\pi+\pi) \\ \pi + \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(2\pi) \\ 2\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\pi \end{bmatrix}$$

men

$$T(\pi) + T(\pi) = \begin{bmatrix} \sin(\pi) \\ \pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin(\pi) \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2\pi \end{bmatrix}$$

, så $T(\pi + \pi) \neq T(\pi) + T(\pi)$

og T kan ikke være lineær.