(SIF) Opgavesæt 10

3,1 #1

$$\det\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = 6\cdot(-1) - (-3)\cdot 2 = -6+6 = 0$$

(den inverse findes ikke, da $\det\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = 0$.)

3,1 #3

$$\det\begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = (-2)\cdot 8 - 1\cdot 9 = -16-9 = -25$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det}\begin{bmatrix} 8 & -9 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-25}\begin{bmatrix} 8 & -9 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

3,1 # 7

$$\det\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = 4(-1)-(-2)\cdot 3 = -4+6 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}$$

3,1 # 13

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\cdot\underbrace{(-1)^{(1+1)}}_{=1}\det\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (-1)\overbrace{(-1)^{(1+2)}}^{=1}\det\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\ldots + 3\underbrace{(-1)^{(1+3)}}_{=1}\det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 4\cdot 1 - 0\cdot(-2) = 4$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1\cdot 1 - (-1)(-2) = 1-2 = -1$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 1\cdot 0 - (-1)4 = 4$$

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\cdot 4 + (-1) + 3\cdot 4 = 8-1+12 = \underline{\underline{19}}$$

3,1 # 15

$$\det\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} = 0\cdot(-1)^{(3+1)}\det\begin{bmatrix}-2 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix} + 1\cdot(-1)^{(3+2)}\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\ldots + (-1)(-1)^{(3+3)}\det\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix}-2 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix} = (-2)3 - (-1)\cdot 2 = -6 + 2 = -4$$

$$\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot 2 = 3 - 4 = -1$$

$$\det\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix} = 1\cdot(-1) - 2\cdot(-2) = -1 + 4 = 3$$

$$\det\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} = 0\cdot 1\cdot(-4) + 1\cdot(-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1\cdot 3 = 1 - 3 = \underline{-2}$$

3,1 # 21

$$\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix} \quad \text{er øvre triangulær}$$

under diagonalen er der kun nuller!

$$\Rightarrow \det\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix} = 4\cdot 3\cdot 5$$ (= produktet af indgangene på diagonalen).

3,1 # 23

(efter 1'ste række, ignorerer alt der er ganget med nul)

$$\det\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\ 7 & -3 & 2\\ 2 & 9 & 4\end{bmatrix} = -6\cdot(-1)^{(1+1)}\det\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 9 & 4\end{bmatrix}$$

$$= -6\cdot(-3\cdot 4 - 9\cdot 2) = -6(-12 - 18)$$

$$= -6\cdot(-30) = \underline{180}$$

3,1 # 29

Arealet udspændt af to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{u}$ i planen ($\mathbb{R}^2$) er givet ved absolutværdien af determinanten af matricen der har $\vec{v}$ og $\vec{u}$ som søjlevektorer.

$$\text{Areal} = \left|\det\left[\vec{u}\ \vec{v}\right]\right|$$

$$= \left|\det\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\right| = \left|3\cdot 7 - 5\cdot(-2)\right| = |21 + 10| = 31$$

(absolut værdi, fordi man vil ikke have "negativt areal").

3.1 # 37

hvis $\det\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ c & 4 \end{bmatrix} = 0$, så er $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ c & 4 \end{bmatrix}$ ikke invertebar

$$\det\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ c & 4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$3\cdot 4 - c\cdot 6 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$12 - 6c = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$12 = 6c$$

$$\Updownarrow$$

$$2 = c$$

3.2 # 1

kofaktor exp. efter 2. søjle.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = 0\cdot(-1)^{(1+2)}\det\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 0\cdot(-1)^{(2+2)}\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$+ 3\cdot(-1)^{(3+2)}\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 3\cdot(-1)\cdot(1\cdot 4 - (-1)\cdot(-1))$$
$$= -3\cdot(4-1) = -3\cdot 3 = \underline{-9}$$

3,2 # 5

kofaktor exp. efter 3. søjle

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\cdot(-1)^{(1+3)}\det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 3\cdot(-1)^{(2+3)}\det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\ldots + 1\cdot(-1)^{(3+3)}\det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 2\cdot 1 - 3\cdot 2 = 2-6 = -4$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 1\cdot 1 - 3\cdot 3 = 1-9 = -8$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 1\cdot 2 - 2\cdot 3 = 2-6 = -4$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\cdot 1\cdot(-4) + 3\cdot(-1)\cdot(-8) + 1\cdot 1\cdot(-4)$$
$$= -8 + 24 - 4 = \underline{12}$$

3.2 # 13

trick: rækkereducér til øvre triangulær matrix, hver rækkeoperation giver en ekstra faktor til sidst. (se thm. 3.3 i kap 3.2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - 2R_1}{\sim} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{\text{øvre triangulær!}}$$

(ekstra faktor = 1)

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} = 1\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 1\cdot 5\cdot(-3) = \underline{-15}$$

3.2 # 15

faktor:
(thm. 3.3)

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ -9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 \to R_3 + 3R_1} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad 1$$

$$\underset{\sim}{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad -1$$

$$\overbrace{1 \cdot (-1)}^{-1} \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ -9 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-2) \cdot 5 = -30$$

$$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ -9 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(-1)} (-30) = \underline{30}$$

3.2 # 21

faktor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -10 & -6 \\ 3 & -2 & 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ \sim \\ R_3 \to R_3 + 4R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{bmatrix} \qquad 1, 1, 1$$

$$\underset{\sim}{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -6 \end{bmatrix} \qquad 1, 1$$

$$\underset{\sim}{R_4 \to R_4 - 3R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad 1$$

$$\parallel$$

$$T$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \det(A) = \det(T) = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 6 = 18$$

3,2#23

faktor (som i thm 3.3)

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{R_4 \to R_4 - 2R_3}{\overset{R_2 \to R_2 + 3R_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 11 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad 1$$

$$\overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 11 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad -1$$

$$\underset{\sim}{\overset{R_3 \to R_3 - 4R_2}{R_4 \to R_4 - 3R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 19 & -43 \\ 0 & 0 & 19 & -38 \end{bmatrix} \qquad 1$$

$$\overset{R_4 \to R_4 - R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 19 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad 1$$

$$(-1)\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 19 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 19 \cdot 5 = 95$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det\begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} = \frac{1}{(-1)} \cdot 95 = \underline{-95}$$

3.1#71

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\det B = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}$$

$$AB: \quad \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} \;;\; a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \;;\; a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\det(AB) = (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})$$

$$= \cancel{a_{11}a_{21}b_{11}b_{12}} + a_{12}a_{21}b_{21}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + \cancel{a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}}$$

$$- \cancel{a_{11}a_{21}b_{11}b_{12}} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - \cancel{a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}}$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$$

$$= \det(A)\det(B).$$

<u>3,2# 71</u>

vis $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$

Bruger Theorem 3.4:

sæt $C = AB$

$$\det(B^{-1}C) = \det(B^{-1})\det(C) \qquad (\text{thm } 3.4 \ (b))$$

$$= \det(B^{-1})\det(AB) \qquad (\text{def af } C)$$

$$= \det(B^{-1})\det(A)\det(B) \qquad (\text{thm. } 3.4 \ (b))$$

$$= \frac{1}{\cancel{\det(B)}}\det(A)\cancel{\det(B)} \qquad (\text{thm } 3.4 \ (d))$$

$$= \det(A)$$