SIF opgavesæt 13

4,2#9

Find basis for billedet af T givet ved $x \overset{T}{\mapsto} Ax$

$$T(\vec{x}) = Ax = \begin{bmatrix} 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \\ 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 4\cdot x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Vi skal finde basis for $\operatorname{ran}(T) = \operatorname{Col} A$

da $\operatorname{Col} A = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}\right\}\right)$, skal vi udtynde

$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}\right\}$ til en lin. uafh mængde.

$\Rightarrow$ vi skal smide evt. ikke-pivot søjler væk i A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

pivot i alle søjler! $\Rightarrow$ søjlerne i A er lin. uafh.

dvs. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}\right\}$ er en basis for $\operatorname{Col} A = \operatorname{Ran}(T)$.

4.2 #11

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

skal finde basis for Ran(T) = Col A dvs udtynd søjlerne i A til lin. uafh. mgd.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_3 \sim R_3 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2 \sim R_2 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_3 \sim R_3 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot pivot

vi beholder søjle#1 og søjle#2:

a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for Col A = Ran(T).

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2 \sim -R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_1 \sim R_1 + 2R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T$$

$\left[T \,\middle|\, \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right]$ er totalmatrix for systemet

$$\begin{cases} 1x_1 + 0 \cdot x_2 + 3x_3 - 1x_4 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 1x_2 + 1x_3 - 1x_4 = 0 \end{cases} \qquad (x_3 \text{ og } x_4 \text{ fri})$$

indfør $x_3 = s$, $x_4 = t$

Null(A) på parameterform:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3s + 1 \cdot t \\ x_2 &= -1s + 1 \cdot t \\ x_3 &= 1 \cdot s + 0 \cdot t \\ x_4 &= 0 \cdot s + 1 \cdot t \end{aligned} \quad , \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for Null(A).

4,2#13

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

For at finde en basis for $\operatorname{Ran}(T) = \operatorname{Col} A$, skal vi udtynde A's søjler til en lin. uafh. mgd. (smide ikke-pivot søjler væk).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{R_3 \leftrightarrow R_4}{\overset{R_2 \sim R_2 - 2R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_3 \sim R_3 - 3R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_3 \sim R_3 - 2R_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \\ \text{pivot} & \text{pivot} & & \end{array} \end{array}$$

Søjle 1 og søjle 2 har pivot $\Rightarrow$ vi smider søjle #3 og søjle #4 væk.

a)

En basis for $\operatorname{Ran}(T) = \operatorname{Col} A$ er $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2 \sim -R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_1 \sim R_1 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T$$

$[T|\vec{0}]$ er totalmatrix for

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 2x_4 \end{cases} \qquad (x_3 = s,\ x_4 = t \text{ fri})$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; s,t \in \mathbb{R}$$

en basis for Null(A) er $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

4.2#15

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & 4 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

For at finde en basis for $\mathrm{Ran}(T) = \mathrm{Col}\,A$, skal vi smide ikke-pivot søjlerne væk i A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & 4 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \underset{R_2 \sim R_2 - 3R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & 0 & -15 \\ 7 & 4 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_3 \sim R_3 - 7R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & 0 & -15 \\ 0 & -10 & -20 & 0 & -30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \sim \frac{1}{-5} R_2 \\ R_3 \sim -\frac{1}{10} R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_3 \sim R_3 - R_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & & \\ \text{pivot} & \text{pivot} & & & \end{matrix} \end{array}$$

der er pivot i søjle 1 og søjle 2.

En basis for $Ran(T) = Col\,A$ er $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$.

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_1 \sim R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T$$

$[T \mid \vec{0}]$ er totalmatrix for

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 0\,x_4 + 2x_5 \\ x_2 = -2x_3 + 0\,x_4 - 3x_5 \end{cases} \qquad (x_3 = s,\ x_4 = t,\ x_5 = u \text{ fri variable})$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for $Null(A)$.

4,2#17

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ -2s \end{bmatrix}, \ s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ s \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ er linecert uafh. og dermed en basis for S.

4,2 #19

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 5r-3s \\ 2r \\ 0 \\ -4s \end{bmatrix}, \ r,s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 5r-3s \\ 2r+0\cdot s \\ 0\cdot r+0\cdot s \\ 0\cdot r-4\cdot s \end{bmatrix}, \ r,s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ r\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}; \ r,s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\} \right)$$

$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ har pivot søjle i begge søjler, så

$\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for S

Definition:

Lad V være et underrum i $\mathbb{R}^n$. Hvis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_d\}$ er en basis for V, så er dimensionen af V lig d.

$$\text{Dim}(V) = d.$$

Opgaveeksempel:

Find dimensionen af

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3s + 4t \\ s - 2t \\ 2s \end{bmatrix} ; \; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Opgaveeksempel:

Find en basis for rækkerummet af A, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$