(SIF) opgavesæt 14

4,4#1

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} \right) \quad , \; [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = 4\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4-3\\-4+6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

4,4#7

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right) \qquad [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = 2\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + (-1)\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0+1+3\\2+0+3\\2-1+3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\\4\end{bmatrix}$$

4,4#13

vis, at $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix} \right)$ er en basis for $\mathbb{R}^3$

en basis for $\mathbb{R}^3$ skal opfylde 2 ting:

i) $\text{span}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}^3$, dvs. til ethvert $\vec{y} \in \mathbb{R}$, skal der findes 3 koordinater c_1, c_2, c_3, så

$$\vec{y} = c_1\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}$$

ii) $\mathcal{B}$ skal være lin. uafh.

da der er 3 vektorer i $\mathcal{B}$, og da dimensionen at $\mathbb{R}^3$ er 3, er det nok at vise ii).

(hvis man har 3 lin. uafh. vektorer i $\mathbb{R}^3$, så udspænder de $\mathbb{R}^3$ ifølge theorem 4.7 (SIF)).

skal vise: $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ har Pivot i alle søjler.

$$\underset{\sim}{R_3 \sim R_3 + R_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 \sim R_3 - R_2} \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{pivot} & \text{pivot} & \text{pivot} \end{array} \end{array}$$

✓

4,4 #15

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ find } [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, hvor $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\Updownarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

totalmatrix:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \sim R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_1 \sim R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] = R$$

R er totalmatrix for systemet $\begin{cases} 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 = -5 \\ 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = -1 \end{cases}$

dvs. $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$.

4,4 #17

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \text{ find } [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ dvs. $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\Updownarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

totalmatrix:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&-1&5\\-1&2&-3\end{array}\right] \overset{R_2\sim R_2+R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1&-1&5\\0&1&2\end{array}\right] \overset{R_1\sim R_1+R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&7\\0&1&2\end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}1\cdot c_1+0\cdot c_2=7\\0\cdot c_1+1\cdot c_2=2\end{cases}$$

dvs. $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$.

4,4#19

$\vec{v}$ er $\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$, find $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$

vi kalder $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ for $\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$, dvs vi leder efter c_1, c_2, c_3 der løser

$$c_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}$$

totalmatrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0&-1&1&4\\1&0&1&3\\1&1&1&2\end{array}\right] \overset{R_1\Leftrightarrow R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&3\\0&-1&1&4\\1&1&1&2\end{array}\right]$$

$$\overset{R_3\sim R_3-R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&3\\0&-1&1&4\\0&1&0&-1\end{array}\right]$$

$$\overset{R_2\Leftrightarrow R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&3\\0&1&0&-1\\0&-1&1&4\end{array}\right]$$

$$\overset{R_3\sim R_3+R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{array}\right]$$

$$\overset{\sim}{R_1\sim R_1-R_3} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{array}\right] = T$$

T er totalmatrix for

$$1\cdot c_1 + 0\cdot c_2 + 0\cdot c_3 = c_1 = 0$$
$$0\cdot c_1 + 1\cdot c_2 + 0\cdot c_3 = c_2 = -1$$
$$0\cdot c_1 + 0\cdot c_2 + 1\cdot c_3 = c_3 = 3$$

hvoraf: $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

4,4#25

a,b er faste reelle tal. Find c_1, c_2, så

$$c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 = c_1\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Definer matricen

$$B = [\vec{b}_1, \vec{b}_2] = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

c_1, c_2 skal altså løse $B\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$,
eller (gang m. B^{-1} på begge sider)

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = I_2\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = (B^{-1}B)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

B^{-1} kan findes på flere måder:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(-5)\cdot(-2)-(-3)\cdot(-3)}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, (jeg bruger formelen i (SIF) side 200)

så $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5a-3b \\ -3a-2b \end{bmatrix}$

dvs $c_1\bar{b}_1 + c_2\bar{b}_2 = (-5a-3b)\vec{b}_1 + (-3a-2b)\vec{b}_2 = \vec{u}$

4,4#27

Find c_1, c_2, c_3 som løser $c_1\bar{b}_1 + c_2\bar{b}_2 + c_3\bar{b}_3 = \vec{u}$

$$\Updownarrow$$

(a,b,c er givne tal (faste))

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{B}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Finder B^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_3 \sim R_3 - R_1}{\overset{R_2 \sim R_2 + R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_3 \sim R_3 - 2R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \underset{R_1 \sim R_1 + R_3}{\overset{R_2 \sim R_2 + R_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_1 \sim R_1 + R_2}{\overset{R_3 \sim -R_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -4 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{matrix}}_{B^{-1}}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4a - 3b + 2c \\ -2a - 1\cdot b + 1\cdot c \\ 3a + 2b - c \end{bmatrix}$$

dvs: $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = (-4a - 3b + 2c)\bar{b}_1 + (-2a - b + c)\bar{b}_2 + (3a + 2b - c)\bar{b}_3$.

4,4#51

$$\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

a) da der er to vektorer i $\mathcal{B}$, er det nok at vise at de er lin. uafh. dvs. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ skal have pivot i begge søjler.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{R_2 \sim R_2 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \underset{\text{pivot}}{\underset{\uparrow}{1}} & 2 \\ 0 & \underset{\text{pivot}}{\underset{\uparrow}{-1}} \end{bmatrix}$$

b) find $[\vec{e}_1]_{\mathcal{B}}$ og $[\vec{e}_2]_{\mathcal{B}}$, husk $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

der skal gælde at $\underbrace{[\vec{b}_1\ \vec{b}_2]}_{=B}[\vec{e}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,

$$\Updownarrow$$

$$[\vec{e}_1]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

ved formlen side 200, er $B^{-1} = \frac{1}{\underbrace{1\cdot 3 - 2\cdot 2}_{=-1}}\begin{bmatrix}3 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}$

så $[\vec{e}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-3 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$, og

$[\vec{e}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-3 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

c) vi ser, at $A = B^{-1}$, altså

$$\left[[\bar{e}_1]_{\mathcal{B}}\ [\bar{e}_2]_{\mathcal{B}}\right] = [\vec{b}_1\ \vec{b}_2]^{-1}$$

4,4#53

a) (viser, at $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ er lineært uafh. og finder B^{-1} samtidigt)

$$[B\,|\,I_3] = [\bar{b}_1 \bar{b}_2 \bar{b}_3\,|\,I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \underset{R_2 \sim R_2 - 2R_1}{\overset{R_3 \sim R_3 + R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

$$\overset{R_3 \sim -R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\end{array}\right] \underset{R_1 \sim R_1 + 2R_3}{\overset{R_2 \sim R_2 - 3R_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\end{array}\right]$$

$$\overset{R_1 \sim R_1 + R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\end{array}\right]$$

så B er inverterbar $\Leftrightarrow \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$ lin. uafh., og

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$B\,[\vec{e}_1]_{\mathcal{B}} = \vec{e}_1 \Leftrightarrow B^{-1}B\,[\vec{e}_1]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\vec{e}_1$$

$$\Leftrightarrow [\vec{e}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tilsvarende: $$[\bar{e}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{e}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

c)

så $$\begin{bmatrix} [\vec{e}_1]_{\mathcal{B}} & [\vec{e}_2]_{\mathcal{B}} & [\vec{e}_3]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix}^{-1}$$

4,4#55

Matricen, der roterer $\theta = 30^\circ$ er givet ved

$$R_{30^\circ} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \Big(\underbrace{R_{30^\circ}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\uparrow\ \vec{e}_1 \text{ roteret } 30^\circ},\ \underbrace{R_{30^\circ}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\uparrow\ \vec{e}_2 \text{ roteret } 30^\circ} \Big) = \Big(\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\vec{b}_1},\ \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}}_{\vec{b}_2} \Big)$$

så $$B = [\vec{b}_1, \vec{b}_2] = R_{30^\circ}$$

som i opg. 51 og 53 skal vi finde B^{-1}

$$B^{-1} = R_{(-30^\circ)} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

(det modsatte at at rotere 30°, er at rotere -30° !)

(vi kunne også have brugt formelen s. 200, eller bruge metoden $[B \mid I_2] \sim \dots \sim [I_2 \mid B^{-1}]$).

givet $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, der skal gælde, at

$$B[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \vec{v} \iff [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\vec{v}$$

så $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}$.

4,4#67

$$R_{60^\circ} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$R_{60^\circ} = [\vec{b}_1\, \vec{b}_2]$, så $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

og da der skal gælde, at $[\vec{b}_1\, \vec{b}_2][\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \vec{v}$

$$\Updownarrow \quad [\vec{b}_1\, \vec{b}_2]\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'.$$

4,4 #75

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [\vec{b}_1 \, \vec{b}_2 \, \vec{b}_3],$$

$$B [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \vec{v}$$

$$\Updownarrow$$

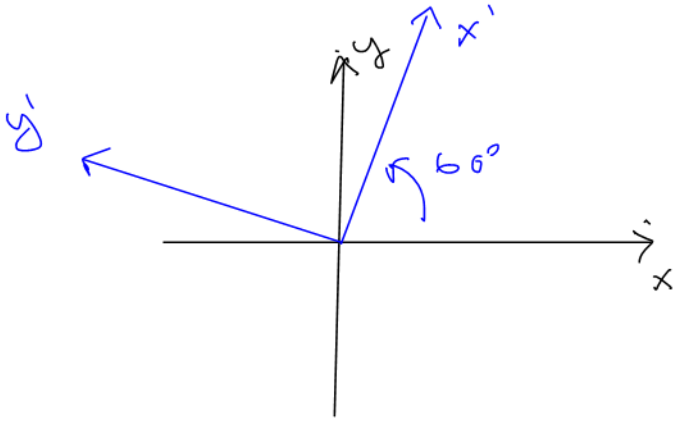
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

dvs.

$$\begin{aligned} x &= x' - y' \\ y &= 3x' + y' - z' \\ z &= y' + z' \end{aligned}$$

4,4 #79

$$R_{60°} = \begin{bmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



$$\mathcal{B} = \left(R_{60°}\vec{e}_1, R_{60°}\vec{e}_2 \right) = \left(\overset{\vec{b}_1}{\overset{\downarrow}{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}}}, \overset{\vec{b}_2}{\overset{\downarrow}{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}} \right)$$

enhedsvektor, der peger i x'-aksens retning

enhedsvektor, der peger i y'-aksens retning.

$$[\vec{b}_1\ \vec{b}_2]\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \Leftrightarrow R_{60^\circ}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

sinus, cosinus regler:

$\cos(v)=\cos(-v)$

$\sin(-v)=-\sin(v)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=R_{60^\circ}^{-1}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ)\\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ)\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}.=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$x'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y$ (indsættes i ellipse ligning)

$$1=\frac{(x')^2}{4^2}+\frac{(y')^2}{5^2}=\frac{(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2}{16}+\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y)^2}{25}$$

$$\Updownarrow\ 4\cdot16\cdot25 = 25\cdot(x+\sqrt{3}y)^2+16\cdot(\sqrt{3}x-y)^2$$

$$=25(x^2+3y^2+2\sqrt{3}xy)+16(3x^2+y^2-2\sqrt{3}xy)$$

$$=25x^2+75y^2+50\sqrt{3}xy+48x^2+16y^2-32\sqrt{3}xy$$

$$\Updownarrow\ \underline{1600 = 73x^2+91y^2+18\sqrt{3}xy}$$

4,4#99

$\mathcal{A}=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n)$ og $\mathcal{B}=(\vec{b}_1,\vec{b}_2\dots\vec{b}_n)$ baser for $\mathbb{R}^n$

Antag der findes en ikke-nul vektor $\vec{v}$, så

$$[\vec{v}]_{\mathcal{A}}=[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

Gælder der så, at $\mathcal{A}=\mathcal{B}$?

Nej. Et modeksempel er $\mathbb{R}^3$ med $\mathcal{A}=\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$

$$\mathcal{B}=\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \text{ og } \vec{v}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Så gælder $[\vec{v}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, og $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

men $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$.

(2 baser kan godt have en vektor til fælles uden at være ens!).