Norm og prikprodukt

Definition

Lad $\mathbf{u} = [u_1\ u_2 \cdots u_n]^T$ og $\mathbf{v} = [v_1\ v_2 \cdots v_n]^T$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Så defineres

- Normen af $\mathbf{u}$: $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$.
  - Der gælder: $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$
  - For en skalar c: $\|c\mathbf{u}\| = |c|\,\|\mathbf{u}\|$
  - Afstand mellem vektorerne $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$: $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.
- Prikprodukt: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \in \mathbb{R}$.
- For en $m \times n$-matrix A og $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ gælder:
$$A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{v}$$
- Norm og prikprodukt: $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$.

Uligheder

Lad $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Så gælder

- Cauchy-Schwartz's ulighed:
$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|.$$
- Trekants uligheden:
$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Ortogonale vektorer

Ortogonalitet

- To vektorer $\mathbf{u} = [u_1\ u_2 \cdots u_n]^T$ og $\mathbf{v} = [v_1\ v_2 \cdots v_n]^T$ i $\mathbb{R}^n$ siges at være ortogonale hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Det skrives $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.
- En mængde af vektorer $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ i $\mathbb{R}^n$ siges at være en **ortogonal** mængde hvis $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ for alle $i \neq j$.
- En mængde $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ i $\mathbb{R}^n$ er **ortonormal** hvis den er en ortogonal mængde med $\|\mathbf{v}_j\| = 1$ for alle j.

Ortogonale/ortonormale baser: simple koordinatvektorer

Lad $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ være en basis for underrummet V af $\mathbb{R}^n$.

- Hvis S er ortogonal, så gælder for $\mathbf{x} \in V$:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|^2}\mathbf{v}_k.$$

- Hvis S er ortonormal, så gælder for $\mathbf{x} \in V$:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k.$$

Gram-Schmidt ortogonalisering

Gram-Schmidts sætning

Ethvert ikke-nul underrum af $\mathbb{R}^n$ har en ortogonal/ortonormal basis.

Procedure

Lad $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ være en basis for underrummet V af $\mathbb{R}^n$. Definer nu induktivt et nyt system $O = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ som følger:

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$
- $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \dfrac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$
- $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \dfrac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$

$\vdots$

- $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \dfrac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \cdots - \dfrac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_{k-1}}{\|\mathbf{v}_{k-1}\|^2}\mathbf{v}_{k-1}.$

Det nye system O udgør en **ortogonal** basis for V. En tilhørende **ortonormal** basis for V er givet ved $\left\{\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}, \cdots, \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|}\right\}$.