Spænd (span) af vektorer

Lad $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Spændet af S defineres som

$$\text{span}(S) := \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k | c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}\},$$

dvs. som familien af samtlige linearkombinationer af vektorerne i S.

Test: Ligger $\mathbf{v}$ i span(S)?

For $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gælder, at $\mathbf{v} \in \text{span}(S)$ hvis og kun hvis ligningsystemet givet ved totalmatricen

$$[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_k \,|\, \mathbf{v}]$$

er konsistent (dvs. ingen pivot i sidste søjle).

Udspændende vektorer

Vektorerne $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ i $\mathbb{R}^m$ siges at udspænde $\mathbb{R}^m$ når

$$\text{span}(S) = \mathbb{R}^m.$$

Ækvivalente betingelser

Betragt vektorerne $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ i $\mathbb{R}^m$, og lad $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_k]$. Følgende betingelser er ækvivalente

- Vektorerne i S udspænder $\mathbb{R}^m$
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent for alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- A har pivot i hver række
- $\text{rank}(A) = m$.

Bemærk

Vektorerne $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ i $\mathbb{R}^m$ har kun chance for at udspænde $\mathbb{R}^m$ når $k \geq m$. For $k < m$ er det umuligt.

Lineær (u)afhængighed

Vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m$ siges at være **lineært uafhængige** hvis

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

kun har løsningen $x_1 = \cdots = x_k = 0$. Ellers kaldes vektorerne **lineært afhængige**.

På matrixform

Lad $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_n]$ være en $m \times n$-matrix. A's søjler er lineært uafhængige præcis når ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

ingen fri variable har. Dvs. når $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_n]$ har pivot i hver søjle (eller tilsvarende når $\text{rank}(A) = n$).

Eksempel

En samling af n vektorer i $\mathbb{R}^m$, med $n > m$, er altid lineært afhængig, da vi har $\text{rank}(A) \leq m < n$, hvor A er som ovenfor.