Determinanter for $n \times n$-matricer

Determinant for 2×2-matricer

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := ad - bc.$$

Lad $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$ matrix.
Undermatricen A_{ij} er den $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fremkommer ved at slette række nr. i og søjle nr. j fra A.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{ij}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kofaktoren C_{ij} er givet ved: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Determinanter for $n \times n$-matricer

Med kofaktoren C_{ij} givet ved $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Definition af determinant

Vi har

$$\det A := a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}.$$

Sætning: Udvikling after række nr. i

Vi har

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}.$$

Sætning: Udvikling after søjle nr. j

Vi har

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

Eksempler

3×3-matricer

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \det \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \det \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

Triangulære $n \times n$-matricer (nedre)

$$\det \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & u_{22} & 0 & 0 \\ * & \cdots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & u_{nn} \end{bmatrix} = u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}.$$

Determinanter og rækkeoperationer

Følgende gælder for en $n \times n$ matrix A (med rækkerne $\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_n$)

- Fremkommer matricen B ved at addere k gange række i fra A til række j $(i \neq j)$, da gælder: $\det B = \det A$.

$$A = \begin{bmatrix} -- \ \mathbf{r}_i \ -- \\ \vdots \\ -- \ \mathbf{r}_j \ -- \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} -- \ \mathbf{r}_i \ -- \\ \vdots \\ -- \ \mathbf{r}_j + k\mathbf{r}_i \ -- \end{bmatrix}$$

- Fremkommer matricen B ved at ombytte række i og j fra A $(i \neq j)$, da gælder: $\det B = -\det A$.

$$A = \begin{bmatrix} -- \ \mathbf{r}_i \ -- \\ \vdots \\ -- \ \mathbf{r}_j \ -- \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} -- \ \mathbf{r}_j \ -- \\ \vdots \\ -- \ \mathbf{r}_i \ -- \end{bmatrix}$$

- Fremkommer matricen B ved at gange række i fra A med k, da gælder: $\det B = k \det A$.

$$A = \begin{bmatrix} -- \ \mathbf{r}_i \ -- \\ \vdots \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} -- \ k\mathbf{r}_i \ -- \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Regneregler

Sætning

En kvadratisk matrix A er invertibel hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.

Sætning

Lad A og B være $n \times n$-matricer. Da gælder

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Eksempler:

For A invertibel har vi:

$$AA^{-1} = I_n \Rightarrow 1 = \det(A)\det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

For en kvadratisk matrix A:

$$\det(A^k) = \det(AA^{k-1}) = \det(A)\det(A^{k-1}) = \cdots = \det(A)^k.$$

Kombination af regneregler:

$$\det(A^7(B^T)^{-3}) = \det(A)^7 \det((B^T)^{-1})^3 = \det(A)^7 \det(B)^{-3}.$$

Cramer's regel

Løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for A invertibel

For en invertibel $n \times n$-matrix A og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, er den entydige løsning $\mathbf{u} = A^{-1}\mathbf{b}$ til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ givet ved

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T, \qquad u_j = \frac{\det(M_j)}{\det(A)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

hvor M_j er den matrix der fremkommer ved at udskift søjle j i A med $\mathbf{b}$.

Eksempel

Løs

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vi har,

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{-2}{2} = -1.$$