Diagonalisering

Definition (diagonaliserbar)

- Lad A være en $n \times n$-matrix. A siges at være diagonaliserbar hvis A er similær med en diagonal matrix, dvs.
$$A = PDP^{-1},$$
hvor D er en $n \times n$ diagonal matrix og P er en $n \times n$ inverterbar matrix.
- En lineær operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ siges at være diagonaliserbar, hvis T's standardmatrix er diagonaliserbar.

Fortolkning

- Betragt en $n \times n$-matrix A som er diagonaliserbar, dvs. $A = PDP^{-1}$. Benævn P's søjler $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.
- Bemærk, at $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ udgør en basis for $\mathbb{R}^n$ (da P er invertibel).
- Vi ser nu på den lineære operator T induceret af A, dvs. $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Hvad er T's matrix repræsentation relativ til $\mathcal{B}$? Jvf. Kapitel 4, er den præcis
$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = P^{-1}(PDP^{-1})P = D.$$

Sætning

Lad A være en $n \times n$-matrix. A er diagonaliserbar hvis og kun hvis A har n lineært uafhængige egenvektorer.

I fald A har n lineært uafhængige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ med tilhørende egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, kan vi skrive

$$A = PDP^{-1},$$

hvor $P = [\mathbf{v}_1 \, \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_n]$ og $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Sætning (n forskellige egenværdier)

Lad A være en $n \times n$-matrix. Hvis A har n *forskellige* egenværdier, da har A netop n lineært uafhængige egenvektorer og A kan derfor diagonaliseres.

Diagonalisering III

Mere generelt:

Sætning

Lad A være en $n \times n$-matrix med de forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ($r < n$ er tilladt).

- Matricen A er diagonaliserbar hvis og kun hvis summen af dimensionerne of egenrummene hørende til $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ er præcis n.
- Hvis A er diagonaliserbar, og $\mathcal{B}_k$ er en basis af egenvektorer for egenrummet hørende til λ_k, da udgør

$$\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_r\}$$

en basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for A.