Dimension af underrum

Sætning: Invarians af antal basiselementer

Lad V være et ikke-nul underrum af $\mathbb{R}^n$. To vilkårlige baser $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ for V indeholder præcis samme antal vektorer.

Definition: Dimension af underrum

Dimensionen af et underrum V af $\mathbb{R}^n$ er antallet af vektorer i en vilkårlig basis for V. Dimensionen af V benævnes $\dim(V)$. Pr. definition er $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.

Sætning 4.7: Betingelse for eksistens af basis

Lad V være et k-dimensionelt underrum af $\mathbb{R}^n$, og lad $\mathcal{S}$ være en delmængde af V som indeholder præcis k vektorer. Så er $\mathcal{S}$ en basis for V hvis

- vektorerne i $\mathcal{S}$ er lineært uafhængige, eller
- $\mathrm{span}(\mathcal{S}) = V$.

Rang og nullity

Definition: Rang og nullity af en matrix

Rangen af en $m \times n$-matrix A er defineret som

$$\mathrm{rank}(A) := \dim(\mathrm{Col}(A)) = \#\text{pivot søjler i } A.$$

Nulliteten af A er givet ved

$$\mathrm{nullity}(A) := \dim(\mathrm{Null}(A)) = \#\text{ikke-pivot søjler i } A.$$

Sammenhæng mellem rang og nullitet

Lad A være en $m \times n$-matrix. Da gælder,

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{nullity}(A) = n = \#\text{søjler i } A.$$

Eksempel

Verificering af basis for nulrum

Vis, at

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

udgør en basis for $\mathrm{Null}(A)$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bemærk først, at $\mathrm{rank}(A) = 2$ og $\mathrm{nullity}(A) = 2$. Ved direkte indsættelse ses, at

$$A\mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

så $\mathbf{v}_1 \in \mathrm{Null}(A)$ og $\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Null}(A)$. Men vektorerne i $\mathcal{B}$ er lineært uafhængige [$\mathbf{v}_1 \neq c\mathbf{v}_2$], og eftersom $\dim(\mathrm{Null}(A)) = 2$, så følger det fra Sætning 4.7 at de to vektorer i $\mathcal{B}$ udgør en basis for $\mathrm{Null}(A)$.

Rækkerummet

Definition

Lad A være en $m \times n$-matrix givet ved rækkevektorerne:

$$A = \begin{bmatrix} - - \mathbf{r}_1 - - \\ \vdots \\ - - \mathbf{r}_m - - \end{bmatrix}$$

Så defineres rækkerummet hørende til A som

$$\text{Row}(A) = \text{span}(\mathbf{r}_1^T, \mathbf{r}_2^T, \ldots, \mathbf{r}_m^T).$$

Det følger, at $\text{Row}(A) = \text{Col}(A^T)$.

Sætning: Basis for rækkerummet

En basis for rækkerummet hørende til en $m \times n$-matrix A er givet ved (de transponerede) ikke-nul rækkevektorer i den reducerede trappeform af A.

Koordinater

Definition 4: Koordinatvektor

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ være en basis for et underrum V af $\mathbb{R}^n$. **Koordinatvektoren** for $\mathbf{x} \in V$ relativt til $\mathcal{B}$ er givet ved

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}, \qquad \text{hvor } \mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_p\mathbf{b}_p.$$

Bemærkning: Koordinatvektoren for $\mathbf{x} \in V$ er den *entydige løsning* til ligningssystemet

$$\left[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_p \,\middle|\, \mathbf{x}\right].$$

Specialtilfælde: Hvis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$, så er $n \times n$-matricen $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots \mathbf{b}_n]$ invertibel, og vi har for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{x}, \qquad \text{da } B[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}.$$