Egenværdier og egenvektorer

Definition

Lad A være en $n \times n$ matrix. En vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, kaldes en **egenvektor** for A, hvis der findes en skalar λ således

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \qquad (*).$$

Skalaren λ kaldes en tilhørende **egenværdi**. Egenvektorer og egenværdier defineres helt analogt for en lineær operator.

Matrixligningen $(*)$ har en ikke-triviel løsning netop når

$$A - \lambda I_n$$

er ikke-invertibel. Egenværdierne for A kan derfor findes ved at løse den:

Karakteristiske ligning

$$(K) \qquad \det(A - tI_n) = 0,$$

hvor venstresiden kan vises at være et polynomium af grad n (polynomium i t).

Egenrum

Givet en egenværdi λ for matricen A, så finder man de tilhørende egenvektorer ved at løse den homogene matrixligning

$$(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Egenrum for λ: Definition

Lad λ være en egenværdi for $n \times n$-matricen A. Underrummet

$$\mathrm{Null}(A - \lambda I_n) \subseteq \mathbb{R}^n$$

kaldes **egenrummet** hørende til egenværdien λ. Egenrummet består af samtlige egenvektorer hørende til egenværdien λ, samt vektoren $\mathbf{0}$.

Bemærk: vi ved kun, at $\dim(\mathrm{Null}(A - \lambda I_n)) \geq 1$. Dimensionen kan meget vel være > 1. Normalt finder man en **basis af egenvektorer** for egenrummet $\mathrm{Null}(A - \lambda I_n)$ hørende til egenværdien λ.

Mere om egenrummet

Sætning

Lad A være en $n \times n$-matrix med egenværdi λ. Så gælder

$$1 \leq \dim \mathrm{Null}(A - \lambda I_n) \leq m_\lambda,$$

hvor m_λ er multipliciteten af λ som rod i den karakteristiske ligning [dvs. $(t-\lambda)^{m_\lambda}$ indgår som "optimal" faktor i den karakteristiske ligning].

Procedure: Givet en $n \times n$ matrix A

- Find A's egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ved at løse (finde rødder i) den karakteristiske ligning

$$\det(A - tI_n) = 0.$$

- For hver egenværdi λ_i, find en basis af egenvektorer for egenrummet

$$\mathrm{Null}(A - \lambda_i I_n).$$

Eksempler

Eksempel I

Find egenværdierne og de tilhørende egenvektorer for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Karakteristisk ligning:

$$0 = \det \begin{bmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & -2-t \end{bmatrix} = t^2 + t - 6. \Rightarrow t = \begin{cases} 2 \\ -3. \end{cases}$$

Egenvektor for egenværdien $\lambda = 2$: Vi løser

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 2 \\ 2 & -2-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenvektor for egenværdien $\lambda = -3$: Vi løser

$$\begin{bmatrix} 1-(-3) & 2 \\ 2 & -2-(-3) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Eksempler

Eksempel II

Egenværdierne for en øvre (eller nedre) trekantmatrix $U = [u_{ij}]$ er netop diagonal elementerne $u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}$. Følger fra:

$$\det(U - tI_n) = \det \begin{bmatrix} u_{11} - t & * & * & * \\ 0 & u_{22} - t & * & * \\ 0 & \cdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} - t \end{bmatrix}$$
$$= (u_{11} - t)(u_{22} - t) \cdots (u_{nn} - t).$$