Hovedresultat om invertible matricer

Sætning

En $n \times n$-matrix A er invertibel, hvis og kun hvis

$$A \sim I_n.$$

Specielt: hvis den reducerede trappeform af A ikke er I_n, så er A ikke invertibel.

Tilhørende algoritme

For en $n \times n$-matrix A, der er invertibel, har vi

$$\left[A \,|\, I_n\right] \sim \left[I_n \,|\, A^{-1}\right].$$

Samme algoritme, men mere generelt

For en $n \times n$-matrix A, der er invertibel, og en $n \times p$-matrix B, har vi

$$\left[A \,|\, B\right] \sim \left[I_n \,|\, A^{-1}B\right].$$

Hvorfor virker algoritmen?

Nyttig notation

For $B = [\mathbf{b}_1\, \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_p]$ en $n \times p$-matrix og $C = [\mathbf{c}_1\, \mathbf{c}_2 \cdots \mathbf{c}_q]$ en $n \times q$-matrix, defineres den sammensatte $n \times (p+q)$-matrice

$$[B \,|\, C] = [\mathbf{b}_1\, \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_p \,|\, \mathbf{c}_1\, \mathbf{c}_2 \cdots \mathbf{c}_q].$$

Jvf. definitionen af matrixprodukt, ses direkte, at for en $n \times n$-matrix A gælder:

$$A[B \,|\, C] = [AB \,|\, AC].$$

For en $n \times n$-matrix A, der er invertibel, og en $n \times p$-matrix B, lader vi P være den invertible matrix (produkt af elementære matricer) der reducerer A til I_n. Dvs. $PA = I_n$, så $P = A^{-1}$. Det følger, at

$$P\big[A \,|\, B\big] = \big[PA \,|\, PB\big] = \big[I_n \,|\, A^{-1}B\big].$$

Invertible matricer

Sætning: Ækvivalente betingelser for invertibilitet

Lad A være en $n \times n$ matrix. Så er følgende udsagn ækvivalente:

a) A er en inverterbar matrix
b) $A \sim I_n$
c) $\text{Rank}(A) = n$
d) A's søjler udspænder $\mathbb{R}^n$
e) Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har mindst en løsning for ethvert $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
f) $\text{Nullity}(A) = 0$
g) A's søjler er lineært uafhængige
h) Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun den trivielle løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
i) Der findes en $n \times n$-matrix B, således $BA = I_n$
j) Der findes en $n \times n$-matrix C, således $AC = I_n$
k) A er et produkt af elementære matricer.