Egenskaber ved lineære transformationer

Injektiv og surjektiv

En funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kaldes

- **Surjektiv**, hvis $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ er konsistent for alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
- **Injektiv**, hvis $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ for $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Egenskaben injektiv/surjektiv relateret til standardmatricen

Betragt en lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ med standardmatrix A. Da gælder,

- T er **injektiv**, hvis og kun hvis, A's søjler er lineært uafhængige [dvs. præcis når A har pivot i hver søjle].
- T er **surjektiv**, hvis og kun hvis, A's søjler udspænder $\mathbb{R}^m$ [dvs. præcis når A har pivot i hver række].

Bemærkning: T er altså både injektiv og surjektiv præcis når A har pivot i alle rækker og i alle søjler. Det kan kun ske når $m = n$.

Egenskaber ved lineære transformationer II

Injektive afbildninger

En lineære transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er injektiv, hvis og kun hvis, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ kun har den trivielle løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Løsningsmængden til $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ kaldes i øvrigt for T's **nulrum**.

Sammensat lineær afbildning

Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ og $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ være lineære transformationer med standardmatricer hhv. A og B. Den sammensatte afbildning $UT : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, givet ved $UT(\mathbf{x}) = U(T(\mathbf{x}))$, er en lineær transformation med standardmatrice BA. Påstanden følger fra udregningen,

$$T_{BA}(\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x} = B(A\mathbf{x}) = B(T(\mathbf{x})) = U(T(\mathbf{x})).$$

Invertible lineære transformationer

Invertibel lineær afbildning

Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være en lineære transformation med standardmatrix A. Hvis A er invertibel, så har T en invers funktion givet ved

$$T^{-1} = T_{A^{-1}}.$$

Det følger fra udregningen,

$$T_A T_{A^{-1}}(\mathbf{x}) = T_{AA^{-1}}(\mathbf{x}) = T_{A^{-1}A}(\mathbf{x}) = T_{A^{-1}} T_A(\mathbf{x}) = T_{I_n}(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Bemærk

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er invertibel præcis når T er både injektiv og surjektiv: dvs. når T's standardmatrix A har pivot i hver søjle og hver række, hvilket igen betyder at A er en invertibel matrix.