Matricer og vektorer

$m \times n$-matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \qquad a_{ij} : \text{indgang } (i,j) \text{ i } A \text{ (en skalar.)}$$

Række- og søjlevektorer

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m; \qquad \mathbf{r} = [r_1 \;\; r_2 \quad \cdots \quad r_n].$$

Matrix-vektor produkt

Sum

Lad A og B være $m \times n$-matricer. Så er $m \times n$-matricen $c_1 A + c_2 B$, hvor c_1 og c_2 er skalarer, givet ved

$$(c_1 A + c_2 B)_{i,j} = c_1 (A)_{i,j} + c_2 (B)_{i,j},$$

hvor $(C)_{i,j}$ betegner indgang (i,j) i matricen C.

Matrix-vektor produkt

Lad $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n]$ være en $m \times n$-matrix med søjlevektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. For $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ defineres

$$A\mathbf{v} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 \mathbf{a}_1 + v_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + v_n \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{v} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Vigtige egenskaber/Identitetsmatricen

Linearitet

Matrix-vektorproduktet opfylder følgende vigtige linearitetsegenskab: For en $m \times n$-matrix A og $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gælder

$$A(r_1\mathbf{u} + r_2\mathbf{v}) = r_1 A\mathbf{u} + r_2 A\mathbf{v},$$

for alle skalarer r_1 og r_2.

Identitetsmatricen

Identitetsmatricen $I_n := [a_{ij}]$ er den $n \times n$-matrix, der har indgangene

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}; \quad \text{f.eks.} \quad I_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Søjlevektorerne i I_n benævnes $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Matricens navn er en konsekvens af, at $I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Den transponerede

Definition

For $A = [a_{ij}]$ en $m \times n$-matrix defineres den transponerede til A som $n \times m$-matricen givet ved $A^\top = [a_{ji}]$. Dvs. søjler i A bliver til rækker i $A^\top$ og vice versa.

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -7 \\ -3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^\top = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 3 & -7 & 0 \end{bmatrix} = -A.$$