# Repræsentation af lineære operatorer

## Lineær operator

En **lineær operator** er en lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

## Matrix repræsentation relativ til basis

Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være en lineær operator, og lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$. Matrix repræsentationen af $T$ relativ til $\mathcal{B}$ er givet ved

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} & [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}.$$

**Bemærk:** Lad $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n]$, så gælder

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} B^{-1}T(\mathbf{b}_1) & B^{-1}T(\mathbf{b}_2) & \cdots & B^{-1}T(\mathbf{b}_n) \end{bmatrix} \\ &= B^{-1}\begin{bmatrix} T(\mathbf{b}_1) & T(\mathbf{b}_2) & \cdots & T(\mathbf{b}_n) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Udregnes effektivt ved at finde den reducerede trappeform af:

$$\left[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n \mid T(\mathbf{b}_1) \quad T(\mathbf{b}_2) \quad \cdots \quad T(\mathbf{b}_n)\right].$$

### Sætning

Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være en lineær operator, og lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$. Indfør $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{b}_n]$ og lad $A$ være $T$'s standardmatrix. Så gælder

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB.$$

**Bemærk:** For $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gælder

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = [A\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}A\mathbf{x} = (B^{-1}AB)B^{-1}\mathbf{x} = [T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Operatoren $T$'s virkning på vektoren $\mathbf{x}$:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{x} & \xrightarrow{A} & A\mathbf{x} & & \text{standard koordinater} \\
\downarrow{\scriptstyle B^{-1}} & & \uparrow{\scriptstyle B} & & \\
B^{-1}\mathbf{x} & \xrightarrow{B^{-1}AB} & (B^{-1}A)\mathbf{x} & & \mathcal{B}\text{-koordinater}
\end{array}$$

# Eksempel

## To repræsentationer af samme operator

Betragt den lineære operator $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ givet ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \end{bmatrix}.$$

$T$'s standardmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Betragt nu basen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ hvor

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2].$$

Så har vi,

$$\begin{aligned}[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left[[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} \, [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$