

Repræsentation af lineære operatorer

Lineær operator

En **lineær operator** er en lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Matrix repræsentation relativ til basis

Lad $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en lineær operator, og lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ være en basis for \mathbb{R}^n . Matrixrepræsentationen af T relativ til \mathcal{B} er givet ved

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} & [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}.$$

Bemærk: Lad $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n]$, så gælder

$$\begin{aligned}[T]_{\mathcal{B}} &= [[B^{-1}T(\mathbf{b}_1) \quad B^{-1}T(\mathbf{b}_2) \quad \cdots \quad B^{-1}T(\mathbf{b}_n)]] \\ &= B^{-1}[T(\mathbf{b}_1) \quad T(\mathbf{b}_2) \quad \cdots \quad T(\mathbf{b}_n)].\end{aligned}$$

Udregnes effektivt ved at finde den reducerede trappeform af:

$$[\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n \mid T(\mathbf{b}_1) \quad T(\mathbf{b}_2) \quad \cdots \quad T(\mathbf{b}_n)].$$

Relation til standardmatrix

Sætning

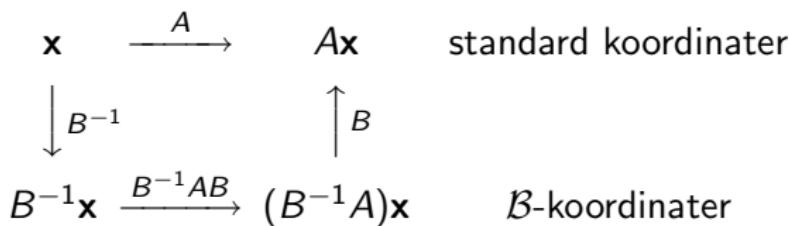
Lad $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en lineær operator, og lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ være en basis for \mathbb{R}^n . Indfør $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n]$ og lad A være T 's standardmatrix. Så gælder

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB.$$

Bemærk: For $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gælder

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = [A\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}A\mathbf{x} = (B^{-1}AB)B^{-1}\mathbf{x} = [T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Operatoren T 's virkning på vektoren \mathbf{x} :



Eksempel

To repræsentationer af samme operator

Betrægt den lineære operator $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ givet ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \end{bmatrix}.$$

T 's standardmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Betrægt nu basen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ hvor

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2].$$

Så har vi,

$$\begin{aligned}[T]_{\mathcal{B}} &= B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$