Ortogonale matricer

Definition

- En $n \times n$-matrix Q siges at være **ortogonal**, hvis Q's søjler udgør en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$.
- En lineær operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ siges at være ortogonal, hvis T's standardmatrix er en ortogonal matrix.

Ækvivalente betingelser (Sætning 6.9)

Følgende betingelser er ækvivalente for en $n \times n$-matrix Q:

1. Q er en ortogonal matrix
2. $Q^T Q = I_n$
3. Q er inverterbar med $Q^{-1} = Q^T$
4. $Q\mathbf{u} \cdot Q\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
5. $\|Q\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$, for alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

Ortogonale matricer: Egenskaber

Sætning 6.10

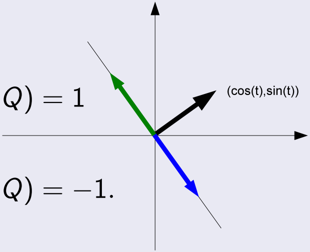
Lad P og Q være $n \times n$ ortogonale matricer. Da gælder:

- $\det(Q) = \pm 1$
- PQ er en ortogonal matrix
- Q^{-1} er en ortogonal matrix
- Q^T er en ortogonal matrix.

Eksempel: Ortogonale 2×2-matricer

Der er to muligheder,

$$Q = \begin{cases} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, & \det(Q) = 1 \\ \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}, & \det(Q) = -1. \end{cases}$$



Hhv. rotation og en refleksion.

Endnu et eksempel

Bestem en ortogonal operator T på $\mathbb{R}^3$ som opfylder

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{e}_1, \quad \text{hvor } \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Sæt $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, hvor A er standardmatricen for T (en 3×3 ortogonal matrix). Bemærk, at

$$\mathbf{v} = I_3\mathbf{v} = A^T A\mathbf{v} = A^T\mathbf{e}_1,$$

så første søjle i A^T er altså $\mathbf{v}$. Vi fylder nu en ortonormal basis for $\{\mathbf{v}\}^\perp$ i de resterende to søjler i A^T (så A^T og dermed $A = (A^T)^T$ bliver ortogonal). Vi har

$$\mathbf{x} \in \{\mathbf{v}\}^\perp \iff \tfrac{1}{\sqrt{3}}(x_1 - x_2 + x_3) = 0.$$

Det giver en basis for $\{\mathbf{v}\}^\perp$ som ortonormaliseres vha. Gram-Schmidt:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Vi har altså,

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Flytninger

Definition: Flytning

En afbildning $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kaldes en **flytning (rigid motion)**, hvis

$$\|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \qquad \text{for alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Strukturen af flytninger

Man kan vise, at enhver flytning $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er givet ved

$$F(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x} + \mathbf{c},$$

hvor Q er en ortogonal $n \times n$-matrix og $\mathbf{c}$ er en fast vektor i $\mathbb{R}^n$.