Ortogonal projektion

Ortogonalt komplement

Det ortogonale komplement til en delmængde $S \subset \mathbb{R}^n$ er givet ved underrummet

$$S^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ for alle } \mathbf{u} \in S\}.$$

Ortogonal opsplitning

Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$. Ethvert $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ har en entydig opskrivning

$$\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{z},$$

hvor $\mathbf{w} \in W$ og $\mathbf{z} \in W^\perp$. Hvis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er en ortonormal basis for W, så gælder

$$\mathbf{w} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k.$$

Ortogonal projektion

Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$. Den ortogonale projektion U_W på W er givet ved, for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$U_W(\mathbf{x}) = \mathbf{w}, \qquad \text{hvor } \mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{z},\ \mathbf{w} \in W; \mathbf{z} \in W^\perp.$$

Gram-Schmidt: nyt perspektiv

Procedure

Lad $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ være en basis for underrummet V af $\mathbb{R}^n$. Definer nu induktivt et nyt system $O = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ som følger:

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$
  Sæt $W_1 = \text{span}\{\mathbf{v}_1\}$.
- $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 - U_{W_1}(\mathbf{u}_2) \in W_1^\perp$
  Sæt $W_2 = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$
- $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_3 - U_{W_2}(\mathbf{u}_3) \in W_2^\perp$

$\vdots$

Sæt $W_{k-1} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$

-
$$\begin{aligned}\mathbf{v}_k &= \mathbf{u}_k - \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_{k-1}}{\|\mathbf{v}_{k-1}\|^2}\mathbf{v}_{k-1} \\ &= \mathbf{u}_k - U_{W_{k-1}}(\mathbf{u}_k) \in W_{k-1}^\perp.\end{aligned}$$

Det nye system O udgør en **ortogonal** basis for V.

Projektionsmatricen

Standardmatricen for U_W

Lad søjlerne i $n \times k$-matricen C udgøre en basis for underrummet W af $\mathbb{R}^n$. Så er standardmatricen for den ortogonale projektion på W givet ved $n \times n$-matricen:

$$P_W = C(C^T C)^{-1} C^T.$$

Ortonormal basis for W

Betragt en ortonormal basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ for underrummet W af $\mathbb{R}^n$. Lad $C = [\mathbf{v}_1 \, \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_k]$. Bemærk først, at

$$C^T C = I_k, \qquad \text{da } \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Men så gælder, at $P_W = CC^T$. Bemærk nu, at (som forventet)

$$P_W \mathbf{x} = CC^T \mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$