Underrum af $\mathbb{R}^n$

Definition 1: Underrum af $\mathbb{R}^n$

Et underrum W af $\mathbb{R}^n$ er en delmængde $W \subseteq \mathbb{R}^n$, der opfylder:

- $\mathbf{0} \in W$
- $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$
- $\mathbf{u} \in W \Rightarrow r\mathbf{u} \in W$ for enhver skalar r.

Eksempler

- Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$. Så er

$$W = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$$

  et underrum af $\mathbb{R}^n$.
- Lad A være en $m \times n$-matrix. Så er

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

  et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Søjle- og nulrummet

Definition 2

Lad $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{a}_n]$ være en $m \times n$-matrix.

- **Søjlerummet** for A er det underrum $\mathrm{Col}(A)$ af $\mathbb{R}^m$, der udspændes af A's søjlevektorer. Dvs.

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}.$$

  [Bemærk: søjlerummet er intet andet end billedrummet for afbildningen $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$.]
- **Nulrummet** for A er det underrum af $\mathbb{R}^n$, der er givet ved

$$\mathrm{Null}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Definition 3: Basis

En **basis** for et underrum W af $\mathbb{R}^n$, er en mængde af *lineært uafhængige* vektorer $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ fra H, der *udspænder* W. Dvs.

$$W = \mathrm{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p\}.$$

Mere om søjle- og nulrummet

Vigtigt eksempel: Basis for Null(A)

Betragt en $m \times n$-matrix A. En basis for Null(A) findes ved at opskrive løsningen til den homogene ligning $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ på vektorform:

$$c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots c_k\mathbf{b}_k,$$

hvor systemet først er reduceret ned til reduceret trappeform. $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ udgør så en basis for Null(A). Bemærk: basen indeholder præcis nullity(A) vektorer. [Husk: nullity(A) er antal *ikke-pivot* søjler i A.]

Sætning: Basis for Col(A)

Lad A være en $m \times n$-matrix. Pivot søjlerne i A udgør en basis for Col(A).

Mere om baser

Reduktion til basis

Lad $S = \{\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_k\}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$, og lad $V = \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_k)$. Så kan S reduceres til en basis for V ved at fjerne et antal (måske ingen) vektorer fra S.

Udvidelse til basis

Lad $S = \{\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_k\}$ være *lineært uafhængige* vektorer i et underrum V af $\mathbb{R}^n$. Så kan S udvides til en basis for V ved at tilføje et endelig antal vektorer (måske ingen) fra V til S.

Et ikke-nul underrum har altid en basis

Lad V være et ikke-nul underrum af $\mathbb{R}^n$ (dvs. $V \neq \{\mathbf{0}\}$). Så har V en basis: Tag $S = \{\mathbf{v}\}$, hvor $\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, og udvid S til en basis for V.