(Prøve)Eksamen i Calculus

Sæt 2, maj 2011

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 8 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder ”almindelige opgaver”. I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder ”multiple choice”opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

Del I (”almindelige opgaver”)

Opgave 1 (10%)

Bestem Taylorpolynomiet af 3. grad for

$$f(x) = \arcsin(2x),$$

med udviklingspunkt $a = 0$.

Opgave 2 (9%)

En flade $\mathcal{F}$ er givet implicit som løsningsmængden til ligningen

$$F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2z^2 - 26 = 0.$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla F(x, y, z)$.

(b) Bestem en ligning for tangentplanen til $\mathcal{F}$ gennem punktet $(1, -1, 2)$.

Opgave 3 (10%)

En tynd plade dækker netop området

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$$

i xy-planen. Pladen har massetæthed $\delta(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Bestem pladens masse.

(b) Lad $(\bar{x}, \bar{y})$ betegne pladens massemidtpunkt. Af symmetrigrunde har vi $\bar{x} = 0$. Bestem $\bar{y}$.

Opgave 4 (8%)

Betragt 4. gradsligningen

$$z^4 - (3 + i)z^2 + 3i = 0.$$

(a) Hvor mange komplekse rødder har ligningen (regnet med multiplicitet)?

(b) Løs ligningen (vink: sæt $w = z^2$).

Opgave 5 (5%)

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \arccos[4(x^2 + y^2)].$$

(a) Bestem definitionsmængden for f.

(b) Bestem de partielle afledede $f_x(x,y)$ og $f_y(x,y)$.

Opgave 6 (10%)

Betragt funktionen

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

på området

$$R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(a) Bestem de kritiske punkter for f indenfor randen af R.

(b) Find ekstrema (minimum og maksimum) for f på R.

Opgave 7 (12%)

(a) Find den entydigt bestemte løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

der opfylder, at

$$y(0) = 1 \quad \text{og} \quad y'(0) = 0.$$

(b) Det oplyses, at

$$y_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{50}\cos(2\,x) - \frac{2}{25}\sin(2\,x)$$

er en partikulær løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \sin^2(x).$$

Find en partikulær løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = e^{2x} - \sin^2(x).$$

Opgave 8 (10%)

En plan kurve er givet ved

$$\begin{aligned} x(t) &= 3\sin(t) \\ y(t) &= 5\cos(t), \qquad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Beregn kurvens krumningen $\kappa(t)$.

Del II (”multiple choice” opgaver)

Opgave 9 (7%)

Betragt rumintegralet

$$I := \iiint_T (x^2y + xz)\, dV,$$

hvor $T = [0,1] \times [-2,3] \times [-1,1]$. Hvilke af nedenstående 4 itererede integraler kan benyttes til at bestemme I (bemærk: værdien af I skal *ikke* udregnes!)

☐ $\int_{-2}^{3}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(x^2y+xz)dx\,dy\,dz.$

☐ $\int_{0}^{1}\int_{-2}^{3}\int_{-1}^{1}(x^2y+xz)dx\,dz\,dy.$

☐ $\int_{0}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{3}(x^2y+xz)dy\,dz\,dx.$

☐ $\int_{0}^{1}\int_{-2}^{3}\int_{-1}^{1}(xy^2+xz)dz\,dy\,dx.$

Opgave 10 (6%)

Betragt et komplekst polynomium $p(z)$ af grad 7. Marker samtlige korrekte udsagn nedenfor.

☐ $p(z)$ har altid mindst én reel rod
☐ $p(z)$ har præcis 7 forskellige komplekse rødder
☐ $p(z)$ har præcis 7 komplekse rødder regnet med multiplicitet
☐ $p(z)$ har mindst to forskellige rødder.

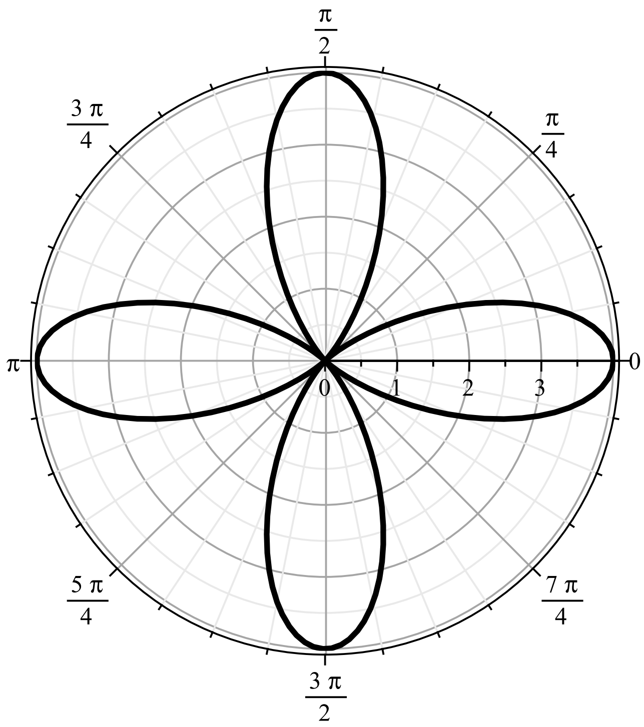
Opgave 11 (6%)

Betragt en funktion $f(x, y)$ af to variable defineret på $\mathbf{R}^2$. Funktionen har kontinuerte partielle afledede for alle $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Der er givet et punkt $P(a, b)$ i $\mathbf{R}^2$, hvor det oplyses at $f_x(a, b) \neq 0$. Marker samtlige korrekte udsagn nedenfor.

- ☐ f er voksende i $P(a, b)$ i x-aksens retning
- ☐ Der findes en enhedsvektor $\mathbf{u}$, således f er aftagende i $P(a, b)$ i retningen givet ved $\mathbf{u}$
- ☐ f er voksende i $P(a, b)$ i y-aksens retning.

Opgave 12 (6%)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen $r = f(\theta)$ afbildet i polære koordinater.



Hvilken (hvilke) af nedenstående forskrifter for f, samt tilhørende definitionsmænge for θ, svarer til ovenstående figur.

- ☐ $f(\theta) = 1 + \cos(4\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 2 + 2\cos(2\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi$
- ☐ $f(\theta) = 2 + 2\sin(4\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 2 + 2\cos(4\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $f(\theta) = 2 + \cos(4\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi$
- ☐ $f(\theta) = 2 + 2\cos(4\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi.$