ORDINÆR EKSAMEN, ANALYSE 2

Der er 10 delspørgsmål i alt, hvert af dem udløser 10 point. Man består med 02 hvis man kan samle cirka 45–50 point. For et 12-tal kræves der mindst 90 point.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der *må ikke* benyttes elektroniske hjælpemidler. Altså ingen lommeregner, computer osv.

Husk at skrive jeres fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. Nummerér siderne og skriv antallet af afleverede ark på første side af besvarelsen.

Opgave 1 (20 POINT)

Lad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x,y) = \cos(x)^2 - 4\sin(x) - \cos(y)^2 + 4\sin(y)$.

(a) Find alle kritiske punkter for f på $\mathbb{R}^2$ og afgør, om de er hhv. maksimums-, minimums- eller saddelpunkter. Vink: Bemærk periodiciteten.

(b) Argumentér for, at $\sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ og $\inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ antages og find værdierne.

Opgave 2 (20 POINT)

Lad $f\colon \mathbb{R}^{1+1} \to \mathbb{R}^1$ være givet ved $f(t,x) = x$.

(a) Vis vha. abstrakte argumenter, at der eksisterer en entydig, *global* løsning $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til begyndelsesværdiproblemet $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = 1$.

(b) Lad $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $h(t) = g(a+t)$. Vis, at $h(b) = g(a)g(b)$. Vink: Hvilket begyndelsesværdiproblem løser h?

Opgave 3 (30 POINT)

Lad $C([0,1],\mathbb{R})$ betegne mængden af kontinuerte funktioner på $[0,1]$. Definér $T\colon C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ ved

$$(T(f))(x) = |f(x) - x| + x$$

(a) Opfylder det metriske rum $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ og funktionen T betingelserne i Banachs fikspunktssætning?

(b) Har T et fikspunkt?

(c) Find et metrisk rum (X,d) og to funktioner $T_1, T_2\colon X \to X$ så $d(T_i(x), T_i(y)) = d(x,y)$, $i = 1, 2$, (og dermed også $d(T_i(x), T_i(y)) \leqslant d(x,y)$, svarende til $\alpha = 1$ i definitionen på en kontraktion – T_1 og T_2 er altså *ikke* kontraktioner), så T_1 har et fikspunkt men T_2 ikke har.

Opgave 4 (10 POINT)

Find Taylorrækken for $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i punktet $\frac{\pi}{2}$ og bestem konvergensradius.

Opgave 5 (20 POINT)

(a) Gør rede for, at der eksisterer et $\delta > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion $f\colon (1-\delta, 1+\delta) \to \mathbb{R}$, så $f(1) = 0$ og $e^{x^2 f(x)} = x$ for alle $x \in (1-\delta, 1+\delta)$.

(b) Find $f'(1)$.