REEKSAMEN, ANALYSE 2

Der er 10 delspørgsmål i alt, hvert af dem udløser 10 point. Man består med 02 hvis man kan samle cirka 45–50 point. For et 12-tal kræves der mindst 90 point.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der *må ikke* benyttes elektroniske hjælpemidler. Altså ingen lommeregner, computer osv.

Husk at skrive jeres fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. Nummerér siderne og skriv antallet af afleverede ark på første side af besvarelsen.

Opgave 1 (20 POINT)

Lad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x,y) = 2x^3 - x^2 - y^2$.

(a) Find alle kritiske punkter for f på $\overline{B_1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ og afgør, om de er hhv. maksimums-, minimums- eller saddelpunkter.

(b) Argumentér for, at $\sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in \overline{B_1}(0)\}$ og $\inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in \overline{B_1}(0)\}$ antages og find værdierne. Vink: Læg mærke til, at randen er nem at parametrisere.

Opgave 2 (20 POINT)

Lad $f_1\colon \mathbb{R}^{1+1} \to \mathbb{R}^1$ være givet ved $f_1(t,x) = 3 - x + 3t$.

(a) Vis vha. abstrakte argumenter, at der eksisterer en entydig *global* løsning $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til begyndelsesværdiproblemet $y'(t) = f_1(t, y(t))$, $y(0) = 0$.

(b) Bestem – uden at finde løsningen g – konstanter $a, b \in \mathbb{R}$, så $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $h(t) = \frac{1}{3}g(t)$ løser begyndelsesværdiproblemet $y'(t) = f_2(t, y(t))$, $y(0) = 0$, hvor $f_2(t,x) = a - bx + t$. Begrund dit svar.

Opgave 3 (30 POINT)

Lad $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved $g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1^3 + x_2 - \frac{1}{3}x_2^3 \\ \frac{1}{3}x_2^3 + x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 \end{pmatrix}$.

(a) Afgør, for hvilke $x \in \mathbb{R}^2$, g er differentiabel, og find Jacobi-matricen $Dg(x)$ for g i disse punkter.

(b) Lad med samme notation som i Theorem 8.3 i Notes for Analyse 1 and Analyse 2 af Horia Cornean $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2$ og afgør for hvilke $u_0 \in \mathbb{R}^2$, antagelserne i sætningen er opfyldt.

(c) Har g en global invers (dvs. findes en funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, så $f \circ g(x) = g \circ f(x) = x$)? Begrund dit svar.

Opgave 4 (10 POINT)

Find Taylorrækken for $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = x^6 + 5x^2 + 19$ i punktet -2 og bestem konvergensradius. Vink: Resultatet ikke er videre pænt.

Opgave 5 (20 POINT)

(a) Gør rede for, at der eksisterer et $\delta > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion $f\colon (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}$, så $f(0) = 0$ og $\ln(x + f(x) + 1) + 1 = \cos(f(x))$ for alle $x \in (-\delta,\delta)$.

(b) Find $f'(0)$.