ORDINÆR EKSAMEN, ANALYSE 2

Der er 5 opgaver med 10 delspørgsmål i alt, hvert af dem udløser 10 point. Man består med 02 hvis man kan samle cirka 45–50 point. For et 12-tal kræves der mindst 90 point.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der *må ikke* benyttes elektroniske hjælpemidler. Altså ingen lommeregner, computer osv.

Husk at skrive jeres fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. Nummerér siderne og skriv antallet af afleverede ark på første side af besvarelsen.

Opgave 1 (20 POINT)

Lad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x, y) = \cosh(g(x, y))$, hvor $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ og $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som bekendt er givet ved $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Antag, at $g \neq 0$ overalt.

(a) Lad $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Find en simpel nødvendig og tilstrækkelig betingelse, som kun afhænger af g (eller dens afledede) i punktet (x_0, y_0), for at (x_0, y_0) er et kritisk punkt for f.

(b) Det oplyses, at $g(1, 2) = 3$. Antag, at (x_0, y_0) er et kritisk punkt for f. Find en simpel tilstrækkelig betingelse på g (eller dens afledede) i (x_0, y_0) for at (x_0, y_0) er et maksimumspunkt for f. Vink: Kan man sige noget om fortegnet på $g(x_0, y_0)$?

Opgave 2 (20 POINT)

Lad $f\colon \mathbb{R}^{1+2} \to \mathbb{R}^2$ være givet ved $f(t, (x_1, x_2)) = (x_2, x_1)$.

(a) Vis vha. abstrakte argumenter, at der eksisterer en entydig, *global* løsning $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ til begyndelsesværdiproblemet $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = (1, 0)$.

(b) Lad $h = (h_1, h_2)$ være løsningen fra delspørgsmål (a). Findes der konstanter $a, b \in \mathbb{R}$ så $ah_1(t) + bh_2(t) = e^t$ og/eller så $ah_1(t) + bh_2(t) = \cos(t)$? Begrund dit svar.

Opgave 3 (30 POINT)

Lad $d \geqslant 2$, $1 \leqslant m < d$, $U \subset \mathbb{R}^d$ være åben, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ og $a \in \mathbb{R}^m$. Antag, at der findes et $p \in U$ så $f(p) = a$.

(a) Brug sætningen om implicit givne funktioner til at finde en simpel betingelse på f, som sikrer, at $f(x) = a$ har andre løsninger end p.

(b) Antag, at den partielle Jacobi-matrix $[D_u f(p)] = \{\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(p) \mid 1 \leqslant j, k \leqslant m\} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ er invertibel. Sæt $n = d - m$. Vis, at der findes en mængde $W \subset \mathbb{R}^n$ og en funktion $g \in C^1(W, \mathbb{R}^m)$ så $f(g(t), t) = a$ for alle $t \in W$.

(c) Argumentér for, at der findes en omegn V om p, så $f^{-1}(a) \cap V = G_g \cap V$, hvor $G_g = \{(g(t), t) \in \mathbb{R}^d \mid t \in W\}$.* Det er nok at skitsere argumentet. Vink: Benyt Banachs Fikspunktssætning og beviset for sætningen om implicit givne funktioner.

Opgave 4 (10 POINT)

Find Taylorrækken for $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = e^x e^7$ i punktet -7 og bestem konvergensradius.

Opgave 5 (20 POINT)

(a) Lad $O \subset \mathbb{R}$ være åben, $x_0 \in O$ og $f \in C^1(O, \mathbb{R})$. Antag, at $\forall r > 0 \exists x_1, x_2 \in B_r(x_0)\colon f(x_1) = f(x_2), x_1 \neq x_2$. Argumentér for, at $f'(x_0) = 0$.

(b) Bemærk, at $1 - 0 \cdot 0 - e^0 = 0$. Findes der et $\varepsilon > 0$ og en funktion $f\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ så $1 - xf(x) - e^{f(x)} = 0$? Hvis ja, find $f'(0)$. Begrund dit svar.

*M.a.o. skal der argumenteres for, at funktionen g, der løser $f(g(t), t) = a$, er entydigt bestemt i en tilpas lille omegn om p.