

# Matematisk modellering og numeriske metoder

## Lektion 11

Morten Grud Rasmussen

5. november 2016

### 1 Partielle differentiaalligninger

#### 1.1 Udledning af varmeligningen

Vi vil nu – på samme måde som med bølgeligningen – udlede varmeligningen, som er en model for udbredelse af varmen  $u$ , som er en funktion af de tre rumlige koordinater  $x$ ,  $y$  og  $z$  samt tiden  $t$ , i et legeme, ud fra fysiske betragtninger. Vi begynder som før med nogle fysiske antagelser.

1. Den specifikke varmekapacitet  $\sigma$  og materialets tæthed  $\rho$  er konstant gennem legemet.
2. Der bliver ikke produceret eller fjernet varme fra legemet.
3. Varme bevæger sig fra varme til kolde områder af legemet på en sådan måde, at strømningens hastighed er proportional med gradienten (store temperaturforskelle giver hurtigere udveksling). Dette kan skrives

$$v = -K \operatorname{grad} u, \quad (1)$$

hvor  $v$  betegner hastigheden af varmestrømningen.

4. Varmeledningsevnen er konstant gennem legemet. Dette svarer til, at  $K$  i ovenstående udtryk er en konstant.

Under disse antagelser vil vi nu udlede varmeligningen.

Lad  $T$  være en kube i legemet med overflade  $S$  og  $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  være en såkaldt ydre normalvektor af længde 1. Dette betyder blot, at for hvert punkt  $p$  i overfladen  $S$  af kuben  $T$ , så er  $n(p)$  en vektor, som står vinkelret på  $S$ , peger udad, og har længde 1. Da måler

$$v(p) \cdot n(p)$$

hastigheden, hvormed varmen forlader (eller, hvis tallet er negativt, trænger ind i) kuben  $T$  i netop punktet  $p$ . Hvis vi altså integrerer over  $S$  (tænk på det som summen af integraler over hver side af kuben for sig – for et passende valg af koordinatsystem svarer dette altså blot til, at man

kun integrerer over to af de rumlige koordinater), så får vi altså den samlede mængde af varme, der forlader (hvis integralet er positivt), eller trænger ind i (hvis integralet er negativt),  $T$ :

$$\iint_S v(p) \cdot n(p) \, dA,$$

hvor  $dA$  angiver, at vi integrerer over et overfladeareal. At integrere over en overflade af en kube i  $\mathbb{R}^3$  svarer til, at man "integrerer over endepunkterne" i et interval i  $\mathbb{R}^1$ . At "integrere over endepunkter" af et interval betyder blot, at man tager summen af værdierne i hvert endepunkt. At gange en "ydre normalvektor af længde 1" på integranten i det endimensionelle tilfælde betyder tilsvarende, at venstre endepunkt ganges med  $-1$  mens højre endepunkt ganges med  $+1$ . Alt i alt ender vi altså med, at den endimensionelle pendant til ovenstående overfladeintegral i  $\mathbb{R}^3$  svarer til  $v(b) - v(a)$ , hvor  $a$  og  $b$  er hhv. venstre og højre endepunkt af intervallet. Hvis  $v$  ellers er differentiabel, ser vi nu, at denne sum også kan skrives som

$$v(b) - v(a) = \int_a^b v'(x) \, dx.$$

Det viser sig, at denne formel også har en pendant i  $\mathbb{R}^3$ , som hedder Gauss' divergenssætning.

**Sætning 1.1.** *Lad  $T$  være en lukket, begrænset delmængde i  $\mathbb{R}^3$  med en overflade  $S$  som er orienterbar (dvs. at man meningsfyldt kan tale om yder- og inderside), stykkevist glat (dvs. at  $S$  kan deles op i endeligt mange dele  $S = \cup_i S_i$  hvorpå den ydre normalvektor af længde 1  $n: S_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  er kontinuert). Lad  $F$  være en vektorfunktion som har kontinuerte partielt afledede i et domæne som indeholder  $T$ . Så er*

$$\iiint_T \operatorname{div} F \, dV = \iint_S F \cdot n \, dA.$$

Bruger vi nu antagelsen (1) og anvender Gauss' divergenssætning på udtrykket, får vi

$$\iint_S v \cdot n \, dA = -K \iint_S (\operatorname{grad} u) \cdot n \, dA = -K \iiint_T \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) \, dV = -K \iiint_T \nabla^2 u \, dV.$$

Vi kan også beregne den totale mængde varme i  $T$ :

$$H = \iiint_T \sigma \rho u \, dV,$$

Mængden af varme, der forlader  $T$ , må derfor også være

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = - \iiint_T \sigma \rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dV,$$

idet der ikke bliver produceret varme i eller fjernet varme i legemet. Altså har vi at

$$- \iiint_T \sigma \rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dV = -K \iiint_T \nabla^2 u \, dV \quad \text{eller} \quad \iiint_T \left( \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \nabla^2 u \right) \, dV = 0,$$

hvor  $c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$  skrives som et kvadrat, fordi tallet er positivt. Da dette skal gælde for alle kuber, ligegyldigt hvor små, bliver integranten nødt til at være 0 næsten overalt, hvilket for kontinuerte funktioner medfører, at det gælder overalt. Vi har altså vist, at antagelserne fører til *varmeligningen*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u,$$

hvis løsning giver temperaturen i et givet punkt til et givet tidspunkt, og konstanten  $c^2$  kaldes den *termiske diffusivitet*. Bemærk, at varmeligningen også modellerer kemiske diffusionsprocesser, og derfor også går under navnet *diffusionsligningen*.

## 1.2 Løsning af varmeligningen vha. Fourierrækker

Vi vil nu løse den en-dimensionelle varmeligning. Principperne bag løsningsmetoden har vi allerede set den første gang, vi løste bølgeligningen, og faktisk vil der være stort sammenfald ikke blot i principperne, men også i de konkrete udregninger, grundet bølge- og varmeligningernes fællestræk. Det vil dog vise sig, at det er forskellene, der kommer til at dominere, i den forstand at løsningerne vil opføre sig fundamentalt forskelligt.

Vi begynder med at formulere det problem, vi vil løse. I første omgang formulerer vi det som et fysisk problem, og derefter modellerer vi det vha. en passende PDE med begyndelses- og randbetingelser. Det fysiske system består af en tynd metalstang eller -tråd, som er perfekt homogen, har konstant tykkelse, og er fuldstændigt isoleret, bortset fra i enderne, hvor temperaturen holdes på  $0^1$ . Hvis vi vælger vort koordinatsystem, så metalfætterer ligger langs  $x$ -aksen med den ene ende i  $x = 0$  og den anden ende i  $x = L$ , så er dens temperatur til tiden  $0$  beskrevet ved  $f(x)$  for  $0 < x < L$ , hvor  $f$  er en passende funktion. Det fysiske (og om lidt matematiske) problem består nu i at udregne, hvad temperaturen på et givet punkt på stangen er til en vilkårlig positiv tid. Med andre ord skal vi finde en funktion  $u$ , som opfylder, at

$$u(x, 0) = f(x) \quad (2)$$

og

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{for} \quad t \geq 0, \quad (3)$$

og som opfører sig, som varme vil gøre. Til at håndtere sidstnævnte har vi heldigvis *varmeligningen* i én dimension

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(isoleringen og tykkelsen af stangen gør, at vi kan betragte problemet som en-dimensionelt). Vi taler om, at vi betragter varmeligningen med begyndelsesbetingelsen (2) og randbetingelsen (3). Bemærk, at vi ikke har specificeret hastighedsændringen til tid  $t = 0$  i begyndelsesbetingelsen som vi gjorde det for bølgeligningen. Dette er ikke nødvendigt for varmeligningen, og er en første indikation på, at dette problem opfører sig markant anderledes end tilfældet er for bølgeligningen. Løsningsmetoden består af de samme tre trin som for bølgeligningen.

### Trin 1: Separering af variable-metoden eller produktmetoden

Antag, at løsningen kan skrives på formen  $u(x, t) = F(x)G(t)$ . Så er

$$\frac{\partial u}{\partial t} = FG' \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G.$$

Vi sætter disse udtryk ind i varmeligningen og dividerer med  $c^2FG$  og får

$$\frac{G'}{c^2G} = \frac{FG'}{c^2FG} = \frac{c^2F''G}{c^2FG} = \frac{F''}{F},$$

<sup>1</sup>Vi vælger  $0$  af bekvemmelighedsårsager. Det er relativt simpelt at indse, at differentiaalligningen er ligeglad med konstanter, så vi kunne lige så vel have valgt temperaturen  $10$  – hvilken også viser, at der for metoden ikke er forskel på, om vi snakker om  $0$  i eksempelvis  $^{\circ}\text{C}$  eller  $\text{K}$ .

hvor yderste højre og yderste venstre udtryk hver især kun afhænger af  $t$  hhv.  $x$ , og de må derfor være konstante. Vi får derfor

$$F'' - kF = 0 \quad \text{og} \quad G' - c^2kG = 0,$$

altså to ODE'er, præcis som for bølgeligningen, med den – afgørende, skal det vise sig – forskel, at ODE'en for  $G$  kun er førsteordens.

## Trin 2: Bestemmelse af løsninger, som opfylder randbetingelserne

Idet ligningen for  $F$  er identisk for bølge- og varmeligningen får vi med verbatim samme argumenter, at  $k = -p^2$  skal være negativ, at  $p = \frac{n\pi}{L}$  og at  $F$  derfor er givet som

$$F(x) = F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{hvor} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Med  $\lambda_n = cp = \frac{cn\pi}{L}$  og  $k = -p^2$  bliver ODE'en for  $G$  altså

$$G' + \lambda_n^2 G = 0,$$

som har løsningen

$$G_n(t) = b_n e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \text{hvor} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{og} \quad b_n \in \mathbb{R}.$$

Hvis vi altså skriver

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t},$$

så er  $u_n$  problemets *egenfunktioner* med *egenværdier*  $\lambda_n$ .

## Trin 3: Bestemmelse af løsninger, som også opfylder begyndelsesbetingelsen

Indtil videre har vi konstrueret løsninger som løser den endimensionelle varmeligning med randbetingelserne (3). Med mindre begyndelsesbetingelserne er helt specielle, vil vi i midlertid ikke have fundet løsninger, som opfylder (2). Ideen er igen at tage linearkombinationer af  $u_n$ 'erne, så resultatet opfylder begyndelsesbetingelserne. Vi ved fra Theorem 1.5 fra Lektion 10, at vi må tage endelige linearkombinationer af løsninger og stadig have en løsning (da varmeligningen er homogent lineær). Som for bølgeligningen vil vi imidlertid forsøge os med en *uendelig* linearkombination:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \text{hvor} \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}. \quad (4)$$

Begyndelsesbetingelsen lyder

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x), \quad (5)$$

idet eksponentialfunktionerne fejles af banen af  $t = 0$ . Af (5) fremgår det, at  $b_n$ 'erne altså skal være Fourier-koefficienterne for den ulige  $2L$ -periodiske udvidelse af  $f$ , og er altså givet ved

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Dette *beviser* ikke, at  $u$  givet ved ovenstående er en løsning, blot at en evt. løsning på formen (4) nødvendigvis må være givet på denne måde. Et egentligt bevis er udenfor dette kursus' afgrænsning. Vi nøjes med at konstatere, at det *kan* bevises, eksempelvis hvis  $f$  er stykkevist kontinuert og har venstre- og højreafledede overalt.

Vi bemærker, at idet  $\lambda_n^2 > 0$ , så vil alle løsninger nærme sig nul med eksponentiel hast. At alle løsninger nærmer sig nul kan næppe overraske; en metalfætter, som ikke bliver tilført varme, men som er fuldstændigt isoleret bortset fra i endepunkterne, hvor den holdes på nul grader, vil naturligvis gå mod en temperatur på nul overalt. En anden ting, vi bemærker, er, at jo større  $n$ , desto større  $\lambda_n^2$ , og dermed hurtigere konvergens mod 0. Men hvad betyder et højere  $n$  for  $u_n$ 's begyndelsesværdi? Prøv at tegne situationen, og overbevis dig selv om, at større  $n$ 'er naturligt må betyde, at  $u_n$  hurtigere konvergerer mod 0!

### 1.3 Eksempler

Vi vil nu illustrere sidste afsnits afsluttende bemærkning med et konkret eksempel.

**Eksempel 1.2.** For at få nogle tal, man kan forholde sig til, ud af det, antager vi, at vi ser på en 80 cm lang kobberstang, hvor de fysiske data er som følger:  $\rho = 8.92 \text{ g/cm}^3$ ,  $\sigma = 0.092 \text{ cal/(g} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}$  og  $K = 0.95 \text{ cal/(cm} \cdot \text{s} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}$ . Med disse tal giver  $c^2 = K/(\sigma\rho) = 1.158 \text{ cm}^2/\text{s}$ .

Vi betragter to tilfælde. I det ene tilfælde er begyndelsesbetingelsen  $f_a$  givet

$$f_a(x) = 100 \text{ }^\circ\text{C} \sin\left(\frac{\pi}{80 \text{ cm}}x\right),$$

i det andet er begyndelsesbetingelsen  $f_b$  givet ved

$$f_b(x) = 100 \text{ }^\circ\text{C} \sin\left(\frac{3\pi}{80 \text{ cm}}x\right).$$

Vi har altså

$$b_n(f_a) = \begin{cases} 100 \text{ }^\circ\text{C} & \text{for } n = 1 \\ 0 \text{ }^\circ\text{C} & \text{ellers} \end{cases} \quad \text{og} \quad b_n(f_b) = \begin{cases} 100 \text{ }^\circ\text{C} & \text{for } n = 3 \\ 0 \text{ }^\circ\text{C} & \text{ellers} \end{cases}.$$

idet  $\lambda_1^2 = 1.158 \cdot \pi^2/80^2 \text{ s}^{-1} = 0.001785 \text{ s}^{-1}$  og  $\lambda_3^2 = 3^2\lambda_1^2 = 0.01607 \text{ s}^{-1}$  er temperaturudviklingen i de to tilfælde altså givet ved hhv.

$$u_1(x, t) = 100 \text{ }^\circ\text{C} \sin\left(\frac{\pi}{80 \text{ cm}}x\right)e^{-0.001785 \text{ s}^{-1}t}$$

og

$$u_3(x, t) = 100 \text{ }^\circ\text{C} \sin\left(\frac{3\pi}{80 \text{ cm}}x\right)e^{-0.01607 \text{ s}^{-1}t}.$$

(Bemærk i øvrigt, hvordan enhederne for konstanterne *automatisk* kommer til at passe, hvis ellers man gør det rigtigt). Vi vil nu undersøge, hvor hurtigt maksimaltemperaturerne halveres i hhv. det ene og det andet tilfælde. Det ses let, at maksimaltemperaturerne antages i hhv.  $x = 40 \text{ cm}$  og (eksempelvis)  $x = \frac{80}{6} \text{ cm}$  (hvor hhv. den ene og den anden sinus-faktor er 1), og vi skal altså blot løse

$$u_1(40 \text{ cm}, t) = 100 \text{ }^\circ\text{C} e^{-0.001785 \text{ s}^{-1}t} = 50 \text{ }^\circ\text{C} \quad \text{og} \quad u_3\left(\frac{80}{6} \text{ cm}, t\right) = 100 \text{ }^\circ\text{C} e^{-0.01607 \text{ s}^{-1}t} = 50 \text{ }^\circ\text{C}$$

som giver hhv.  $t = 388 \text{ s} = 6.5 \text{ min}$  og  $t = 43 \text{ s}$ , og andet tilfælde køler altså 9 gange så hurtigt af som det første tilfælde (hvorfor netop 9?).

Vi vil nu betragte en variant, hvor begyndelsesbetingelsen giver anledning til uendeligt mange Fourierled, modsat ovenstående, hvor der kun var brug for ét i hver situation (hhv.  $(n = 1)$ - og  $(n = 3)$ -ledet).

**Eksempel 1.3.** Lad  $f$  være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } 0 < x < 40 \text{ cm} \\ 80 \text{ cm} - x & \text{for } 40 \text{ cm} < x < 80 \text{ cm} \end{cases}.$$

Ved omskalering koefficienterne fra opgave 15 i afsnit 11.2, som I blev stillet som opgave til lektion 9, ser vi, at

$$b_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{for } n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{320 \text{ cm}}{n^2\pi^2} & \text{for } n \in 4\mathbb{N} - 3 \\ -\frac{320 \text{ cm}}{n^2\pi^2} & \text{for } n \in 4\mathbb{N} - 1 \end{cases}.$$

Dvs.

$$u(x, t) = \frac{320 \text{ cm}}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{80 \text{ cm}} x\right) \exp(-(2n-1)^2 \lambda_1^2 t)$$

løser problemet. Men dette viser tydeligt, at for  $t > 0$  gælder det, at jo større  $n$  er, desto mindre er bidraget til summen (og jo større  $t$ , desto mindre behøver  $n$  være, før ledet bliver lille): ikke nok med, at der i hvert led indgår en faktor  $\frac{1}{(2n-1)^2}$ , der indgår også en faktor  $\exp(-(2n-1)^2 \lambda_1^2 t)$  (og sidstnævnte går klart hurtigst mod nul). Hvad betyder dette? Jo, det betyder, at så snart tiden er startet, vil udtrykket hurtigt domineres af – og dermed være relativt velbeskrevet ved – nogle få, langsomtsvingende sinus-kurver med  $(n = 1)$ -ledet  $\frac{320 \text{ cm}}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{80 \text{ cm}} x\right) \exp(-\lambda_1^2 t)$  som det klart vigtigste. Med andre ord vil selv denne meget skarpe fordeling af varmen i udgangspunktet meget hurtigt blive glat og rund og ligne en sinus-kurve.